

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UMA RELAÇÃO COM
A EXPLORAÇÃO DE SEQUÊNCIAS**

Rivaldo Firmino Sousa

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Trabalho de Projeto

2019

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UMA RELAÇÃO COM
A EXPLORAÇÃO DE SEQUÊNCIAS**

Rivaldo Firmino Sousa

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Trabalho de Projeto orientado pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

2019

Resumo

Esta investigação tem como objetivo estudar como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 5.º ano de escolaridade, dando especial atenção às suas estratégias, representações e dificuldades em compreender padrões e regularidades, bem como em representar sequências. Na sua base está uma experiência de ensino, realizada no primeiro semestre do ano letivo de 2019. Esta experiência assenta uma conjectura de ensino-aprendizagem que segundo a qual os alunos desenvolvem essa capacidade realizando tarefas de cunho essencialmente exploratório, interagindo socialmente a partir do trabalho em pequenos grupos e em coletivo, e utilizando diferentes representações matemáticas e estratégias para representar sequências. A experiência estrutura-se em oito tarefas envolvendo sequências numéricas e pictóricas repetitivas, crescentes, parcialmente repetitivas e parcialmente crescentes, sendo as aulas conduzidas por mim, no duplo papel de professor e investigador. A metodologia é qualitativa de cunho interpretativo. A recolha de dados é feita por observação participante na sala de aula com transcrição de áudio e análise documental de documentos produzidos pelos alunos.

Os resultados mostram que os alunos usam as estratégias de identificação de uma regularidade e de representação e contagem para compreender os padrões e regularidades em sequências. Para representar as sequências, os alunos usam linguagem natural escrita, linguagem natural oral, representação ativa, linguagem simbólica e representação icônica. No trabalho com os padrões e regularidades, os alunos expressam dificuldades em entender o termo unidade, determinar os números pares e ímpares, interpretar, ordenar, comunicar dar atenção ao enunciado, reduzida cultura do trabalho em pares, usar números ordinais, exibir padrão e argumentar.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, sequências, representações, estratégias e dificuldades.

Abstract

This research aims to study how to promote the development of algebraic thinking of grade 5 students, paying special attention to their strategies, representations and difficulties in understanding patterns and regularities, as well as in representing sequences. The basis of the research is a teaching experiment, carried out in the first semester of the 2019 school year. This experiment is based on the teaching-learning conjecture that students develop this ability by working on exploratory tasks, interacting socially by working in small groups and in whole class, and using different mathematical representations and strategies to represent sequences. The experiment is structured in eight tasks involving repetitive, increasing, partially repetitive and partially increasing numerical and pictorial sequences, with the classes being conducted by me, in the double role of teacher and researcher. The methodology is qualitative and interpretative. Data collection was made by participant observation in the classroom with audio transcription and document analysis from documents produced by students.

The results of the studies show that students use the strategies of identification of a regularity and of representation and counting to understand the patterns and regularities in a sequence. To represent sequences, the students use written natural language, oral natural language, active representations, symbolic language, and iconic representations. In the work with patterns and regularities, the students express difficulties understanding the term unity, determining odd and even numbers, interpreting, sorting, communicating, pay attention to the statement of the task, reduced culture of pair work, using ordinal numbers, displaying patterns, and arguing.

Keywords: Algebraic thinking, sequences, representations, strategies and difficulties.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus. Ao SENHOR JESUS CRISTO, dou graças porque até aqui me ajudou, me sustentou, me consolou, me deu sabedoria nos momentos de lutas e aflições. Agradeço também o meu orientador e professor, Dr. João Pedro Mendes da Ponte, por ter acreditado no meu potencial e ter aceitado e embarcar comigo nessa viagem, sendo ainda eu um marinheiro inexperiente. Eu o agradeço e estimo pela forma paciente, mansa e humilde, na condução da orientação dessa investigação. Agradeço também, aos professores do Instituto de Educação, bem como os membros da banca pelas valiosas contribuições.

Agradeço aos alunos, as professoras, a gestão da escola, aos funcionários e membros da secretaria de educação por terem apoiado o meu trabalho.

Agradeço a minha mãe dona Diumaria Maria Sousa por ter exercido o duplo papel de pai e mãe, ter me educado e me ter possibilitado chegar até aqui. Agradeço ao meu pai, em memória, o senhor Antonio Firmino de Sousa e aos meus irmãos, parentes amigos e colegas que me incentivaram e apoiado. A todos vocês o meu MUITO OBRIGADO!

Índice

Capítulo 1- INTRODUÇÃO	9
Motivação e pertinência do estudo	9
Objetivo e questões do estudo	13
 Capítulo 2- SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	 15
Sequências e regularidades	15
Representações	17
Estratégias e dificuldades de ensino e aprendizagem nas representações de generalizações matemáticas envolvendo sequências pictóricas	20
 Capítulo 3- A EXPERIÊNCIA DE ENSINO	 26
As tarefas da experiência de ensino	26
Organização geral da experiência de ensino	28
Planejamento da experiência de ensino	29
 Capítulo 4- ESTUDO-PILOTO	 30
 Capítulo 5- METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO	 38
Opções metodológicas	38
Participantes	39
Métodos de recolha de dados	39
Análise de dados	40
Questões éticas	41
Calendarização	41

Capítulo 6 - A EXPERIÊNCIA DE ENSINO NA SALA DE AULA	42
Aula 1 – Diagnóstico: Exploração da uma sequência repetitiva com dois objetos	42
Aula 2 – Exploração da sequência repetitiva, com setas horizontais e verticais	51
Aula 3–Exploração da sequência crescente: sequência finita de números	58
Aula 4 – Exploração da sequência crescente com números pares e ímpares	71
Aula 5 – Exploração da sequência utilizando a reta numérica	82
Aula 6 – Exploração da sequência mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescente	92
Aula 7 – Exploração da sequência com critérios de divisibilidade	105
Tarefa 8 – Sequência para avaliar	122
 Capítulo 7 - CONCLUSÃO	 137
Síntese do estudo	137
Conclusões do estudo	138
Reflexão final	147
 Referências	 149
 Anexo 1- Cronograma	 153
 Anexo 2- Tarefas selecionadas para a experiência de ensino	 154
Tarefa 1- Sequência repetitiva (Diagnóstico)	154
Tarefa 2- Sequência repetitiva	156
Tarefa 3- Sequências crescentes	158
Tarefa 4- Sequências crescentes com números pares e ímpares	160
Tarefa 5- Sequências utilizando a reta numérica	162
Tarefa 6- Sequência mista, parcialmente crescente repetitiva e parcialmente crescente	163
Tarefa 7- Sequências com critérios de divisibilidade	165
Tarefa 8- Sequência para avaliar	167
 Anexo 3- Termo de consentimento livre e esclarecido	 168
Anexo 4- Índice das figuras	169

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente capítulo começa por referir as orientações curriculares para o ensino da Álgebra, bem como os aspetos essenciais que caracterizam o pensamento algébrico. De seguida, apresenta também as ideias principais que me motivaram à realização deste estudo e descreve o objetivo e as questões orientadoras desta investigação.

Motivação e pertinência do estudo

Em Portugal e no Brasil, o ensino da álgebra tem despertado interesse de pesquisadores na área da Educação Matemática (Branco & Ponte, 2012; Ribeiro, 2001, 2007, 2012, 2013). Além disso, em ambos os países, documentos oficiais apontam a possibilidade do ensino da álgebra nos anos iniciais. Em Portugal, *O Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007), indica que no 1.º ciclo de escolaridade, as ideias que envolvem a álgebra podem vir das relações com os números, as operações e as propriedades geométricas. Pelo seu lado, Ferreira (2017) esclarece que no Brasil as diretrizes curriculares para os anos iniciais mais antigas apenas mencionavam uma aritmética mais generalizada e não contemplavam outras subcategorias do pensamento algébrico. Atualmente, apesar de forma ainda tímida, a publicação de alguns documentos como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e o Pacto Nacional Pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) apontam uma preocupação com o ensino da álgebra nos anos iniciais.

Porém, em relação ao ensino básico, a nível mundial, o NCTM (2007), no referente ao ensino da álgebra apresenta quatro vertentes: (1) compreender padrões, relações e funções; (2) Representar e analisar situações matemáticas e estruturas; (3)

Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) Analisar mudanças em diversas situações.

Inúmeras inquietações, na minha vida como docente, em relação ao ensino de matemática, inclusive no que diz respeito ao ensino da álgebra, me acompanharam durante os meus quinze anos de experiência em sala de aula. As dificuldades que percebia ao observar as queixas dos meus alunos quando iniciava o seu ensino se tornam a cada ano letivo mais latente. Elas fizeram-me refletir sobre a necessidade de buscar novos caminhos que pudessem contribuir para a minha formação e consequentemente, para a minha vida profissional. Por vezes, na minha trajetória com discente, deixava as disciplinas pedagógicas em segundo plano. Preferia estudar e resolver as imensas listas de exercícios e das avaliações frequentemente exigidas pelos professores de disciplinas como Cálculo, Álgebra, Geometria Analítica. Além disso, a visão equivocada, portanto “preconceituosa”, que tinha em relação à Educação Matemática em virtude dos comentários de alguns alunos veteranos e por parte de alguns professores do curso que passam para nós essa visão equivocada do que era a Educação Matemática. Porém, esses comentários não foram suficientes para que eu aceitasse a ideia de que bastava saber o conteúdo matemático para ensinar. Sentindo-me desafiado, passei a refletir sobre questões pedagógicas e destaco que: a cada dia, percebia que o “dominar” o conteúdo a ser ensinado ainda era muito pouco para que os estudantes lograssem sucesso em sua trajetória, pois percebia na fala deles o quanto a Matemática era difícil. Essas inquietações fizeram-me buscar novas alternativas, que somadas à experiência já existentes, concorreram para mudar as minhas concepções e repensar os preconceitos. Essa busca constante, me fizeram sentir a necessidade de dialogar com outros pares e até mesmo desabafar sobre essas inquietações. Um grande parceiro foi um amigo de infância, estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e também, naquele momento, membro do Observatório da Educação Matemática (OEM), que me aconselhava a procurar o grupo. Entretanto, eu não acreditava que o grupo fosse me receber. Certo dia, resolvi enviar um e-mail para o coordenador e, para a minha surpresa, em poucos instantes ele respondeu e me convidou a participar da próxima reunião. Ao chegar à plenária, fui recebido calorosamente pelo grupo. Justamente, nesse dia, estava acontecendo a formação dos subgrupos, com a divisão do grupo em grupos menores. E nesse dia, já fui engajado em um deles. De início tive uma participação bastante tímida, pois ainda não havia entendido qual deveria ser o meu papel no OEM. Percebia também que só os

conhecimentos que tinha eram poucos para acompanhar as decisões do grupo. Nesse instante, resolvi estudar por conta própria os textos que os membros já haviam discutido. A cada leitura tinha a sensação que estava encontrando o que havia procurado para o preenchimento da lacuna que ficou durante a minha formação inicial. Tomei tal gosto por essas leituras que continuei buscando beber em outras fontes. As leituras e as formações davam-me mais segurança e autonomia para participar nas reuniões do grupo e nas decisões no subgrupo. Com o amadurecimento, participei do subgrupo de forma mais madura. Escutava mais e me envolvia mais nas decisões. Indicava literatura e já percebo algumas falhas nelas. Foi um salto qualitativo na minha vida profissional. (Santana e Sousa, 2016, p. 3)

O interesse pelas leituras possibilitou-me ter cursado como aluno especial duas disciplinas, no Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na UFBA. A disciplina Tendências em Educação Matemática e os textos estudados pelo grupo possibilitaram-me a conhecer os trabalhos produzidos pelo Professor Dr. João Pedro Mendes da Ponte, o que me fez encarar a possibilidade de fazer o mestrado na Universidade de Lisboa.

Em setembro de 2017, ingressei no Mestrado em Educação, na Especialidade Didática da Matemática, onde na disciplina Didática dos Números e da Álgebra, tive conhecimento do tema, que de forma intuitiva, despertava o meu interesse – O Pensamento Algébrico. A este respeito, Blanton e Kaput (2005) referem que este pensamento é um processo no qual os alunos generalizam a partir de casos particulares, estabelecem generalizações e expressam-nas cada vez mais em caminhos formais e apropriados à sua idade. Branco, Matos e Ponte (2009) consideram que o pensamento algébrico deve passar por toda a educação básica e o seu início deve ser nos anos iniciais. Para Canavarro (2009), introduzir o pensamento algébrico nos anos iniciais representa um ganho para o ensino da matemática, pois pode torná-lo mais significativo, integrado e interessante, possibilitando dessa forma maiores aprendizagens no estudo posterior da álgebra. Carraher, Martinez e Schliemann (2008) indicam que introduzir generalizações aos estudantes pelos professores de forma expositiva no ensino de matemática é inconsistente. Primeiro, o professor deve criar possibilidades para que eles através de problemas concretos procurem padrões e estabeleçam relações. Sendo assim, gradualmente, os estudantes aprendem a formular generalizações e, com o desenvolvimento da sua maturidade, poderão extrair dados e analisar as expressões que eles próprios ou terceiros desenvolvem. Para Branco e Ponte (2012), quando se trabalha

com o ensino da álgebra com o objetivo de compreender conceitos básicos, as tarefas de natureza exploratória são de grande valia, pois possibilitam estabelecer conexões entre os conceitos, incentivam a apreciação de vários tipos de representações, permitem que os professores iniciem de uma compreensão e as linguagens informais dos alunos para a formalização das suas ideias, dando suporte dessa forma o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Alguns estudos já realizados neste campo mostram resultados encorajadores. Morais (2012) mostra que os alunos, quando trabalham com tarefas matemáticas de natureza exploratória com os seus pares e são encorajados pelo professor a socializar os resultados encontrados, desenvolvem a capacidade para representar e generalizar de formas distintas, desenvolvendo assim o pensamento algébrico. Neste estudo, na resolução de tarefas que envolvam padrões e regularidades em seqüências, os alunos utilizam representações múltiplas como a linguagem natural, representações ativas e icônicas, materiais manipuláveis e representações simbólicas, e usam estratégias aditivas de contagem. Para a autora quando as tarefas selecionadas são adequadas, os alunos conseguem expressar generalizações e dessa forma evidenciar pensamento algébrico.

Já para Cerca (2014), os alunos desenvolvem o raciocínio relacional, em tarefas exploratórias que envolvem as noções de igualdade e desigualdade, pois utilizam características desse tipo de raciocínio como relacionam as justificativas com as expressões que estão trabalhando, analisam as expressões através das relações que são estabelecidas não ficando apenas preso ao valor dado para cada expressão, desenvolvem estratégias para a sua compreensão e interpretação entre as relações existentes. Alguns alunos conseguem fazer sozinhos, mas outros precisam interagir com seus pares ou o professor. Em alguns casos aparecem de forma intuitiva advindo de exemplos concretos. Elas só aparecem em linguagem corrente. Para justificar, os alunos descrevem a expressão ao invés de explicar as suas respostas. Apesar de usar estratégias operacionais a maior parte delas são relacionais.

Para Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007) buscar relações está ligado a desvendar padrões. Para os autores, esses padrões se relacionam com a Álgebra porque permite que o aluno investigue matematicamente e pode possibilitar o ensino da Álgebra desde a pré-escola. Eles acrescentam que esses padrões podem ser de grande valia para o desenvolvimento do pensamento pré-algébrico dos alunos. Para Vale (2012), descobrir diferentes formas de ver uma seqüência pode ser possível com o

trabalho com o padrão de contextos figurativos. Ponte (2016) indica que existe a necessidade de repensar a maneira como se abordam os números no currículo de Matemática. Para ele é preciso que a álgebra seja encarada de modo transversal valorizando assim o pensamento algébrico. Para Blanton e Kaput (2005) os números e as operações devem ser tratados de uma forma algebrizada, ou seja, promover a cultura de representar e generalizar e possibilitar o estudo de padrões e regularidades, no 1.º ciclo.

Tendo por base estas perspectivas e resultados positivos, ao longo dos quatro primeiros meses iniciais do ano letivo de 2019, procurei desenvolver uma experiência de ensino com alunos dos anos iniciais de uma escola pública de uma localidade do Estado Bahia, Brasil, para compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos com sequências lineares. Com a realização desse estudo, busco contribuir para investigações cujo foco seja o pensamento algébrico, mais especificamente, os padrões e as regularidades, através das relações com sequências, nos anos iniciais, na área da Didática da Matemática.

Objetivo e questões de estudo

O Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) de Portugal indica que os alunos devem ser capazes de reconhecer padrões e regularidades. Um dos seus temas transversais é que as idéias algébricas devem aparecer logo no 1.º ciclo através do trabalho com sequências estabelecendo relações com os números e as operações. No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997), para o 2.º ciclo, asseveram que um dos objetivos do ensino da Matemática é ampliar o significado de número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades.

Neste estudo, busco compreender como o trabalho com padrões e regularidades em sequências lineares, em uma experiência de ensino com alunos do 5.º ano de escolaridade de uma escola pública da localidade do Estado da Bahia, Brasil, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Mais especificamente procuro saber:

- i) Que estratégias os alunos utilizam para compreender os padrões e regularidades em sequências lineares?
- ii) Que representações os alunos utilizam para representar sequências lineares?

iii) Que dificuldades os alunos expressam para compreender padrões e regularidade sem sequências lineares?

CAPÍTULO 2

SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Este capítulo faz uma revisão da literatura relativa ao trabalho com sequências e regularidades, as representações matemáticas, estratégias e dificuldades de ensino e aprendizagem nas representações de generalizações matemáticas envolvendo sequências pictóricas.

Sequências e regularidades

De acordo com os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), os programas voltados para o ensino de matemática, desde anos iniciais até os anos finais da educação básica, terão que possibilitar aos alunos o desenvolvimento de algumas habilidades. Dentre elas se destaca aqui essa: Compreender padrões. Pelo seu lado, o documento *As competências Essenciais para o Ensino Básico* (2001), já apontava que durante todos os ciclos do ensino básico, os alunos terão a predisposição para encontrar padrões e regularidades e formular generalizações em muitas situações, especificamente nos contextos aritméticos e geométricos.

Goldin (2008) faz um paralelo da função dos padrões no ensino tradicional e no renovado. Para ele, no primeiro, pelo fato de que o ensino de matemática seja orientado por um currículo que privilegia a estrutura interna da matemática, organizando os seus tópicos em ordem crescente de dificuldades, o padrão deve ser abstraído e generalizado para matemática superior. Já no segundo, por entender que os professores devem desenvolver em seus alunos formas criativas para resolver problemas, na matemática ou na vida cotidiana, individualmente ou de forma coletiva, os padrões devem ser abordados desde os anos iniciais para desenvolver o raciocínio matemático de alto nível, fazer conexões matemáticas e resolver problemas.

Para Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007), a álgebra é um domínio privilegiado para trabalhar com padrões. Eles representados com figuras, nas aulas de matemática, se constituem um recurso didático muito valioso, porque possibilita desenvolver nos alunos; a possibilidade de formas diversas para contar, deslumbrar distintas formas de enxergar sequências e problemas Vale (2012). Os trabalhos com padrões são importantes, porque dão suporte ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, pois possibilita o raciocínio funcional, auxiliam a resolver problemas, desenvolvem habilidades de contagens e operações aritméticas Kılıç (2017).

Alvarenga e Vale (2007), esclarecem que os padrões se mostram boas ocasiões para estabelecer relações entre diversos tópicos da matemática, os padrões permitem que a aprendizagem da matemática seja mais significativa. Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* NCTM (2007), encontramos que algumas noções de álgebra são exploradas quando os estudantes apontam padrões usando a aritmética ou as figuras geométricas. Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007), o termo padrão tem uma multiplicidade de riqueza e pode ser abordado de vários aspectos

Segundo Pimentel e Vale (2013), existe a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico nos alunos dos anos iniciais através de uma sequência de aulas com tarefas que envolvam padrões, possibilitando que eles desenvolvam ideias matemáticas como a generalização. Para Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007), a abordagem do pensamento algébrico nos anos iniciais com o uso de padrões é um bom caminho para a abordagem desse tema.

Alvarenga e Vale (2007), em tarefas que envolvem padrões aparecem de formas implícitas componentes que compõem o pensamento algébrico. Barbosa e Borralho (2009), explorar padrões num contexto de tarefas de investigação permitiu desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Para eles, o ensino da álgebra pode ser iniciado com a exploração de padrões e generalizações. Barbosa e Borralho (2011), quando os estudantes trabalham com tarefas para investigar ou explorar padrões com números ou figuras, é real a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico, pois eles representam, identificam e generalizam relações, interpretam o significado das relações e se tornam conscientes do que são os dados.

Segundo Barbosa e Borralho (2011), explorar padrões com tarefas de investigação e exploração pode ser uma forma alternativa para o entendimento da álgebra, pois possibilita estabelecer elos matemáticos, possibilita a comunicação matemática e torna o seu ensino mais prazeroso. Em Alvarenga e Vale (2007),

encontramos que tarefas que tem como objetivos identificar, construir e compreender padrões, além de possibilitar que esses sejam alcançados, oportuniza que os alunos estabeleçam a comunicação matemática de várias formas. Generalizar situações com números possibilita que os alunos se comuniquem matematicamente. Estas situações podem permitir a relação entre muitos tópicos matemáticos. Esses tópicos permitem que os estudantes formulem e validem conjecturas. Lannin (2003).

Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007) referem que os padrões ao nível de ensino devem ser atrelados a resolução de problemas e a tarefa de investigação de preferência. Quando os alunos estudam sequências com figuras em um ambiente exploratório, são mais exitosos para compreender, analisar, reconhecer, representar e generalizar Vale (2012).

De acordo com o NCTM (2007), nos anos iniciais, os estudantes podem começar a trabalhar com o pensamento recursivo. Eles são capazes de iniciar o trabalho com a sequência de números pares, perceberem que para encontrar o sucessor basta adicionar o número 2 como recurso. Para eles, a recursão pode possibilitar a ampliação e a definição de um número sem fim de sequências. Perceber o reconhecimento de padrões que existem na aritmética, na geometria e no mundo de um modo geral, é o caminho inicial para que os alunos continuem a completar generalizar padrões e acima de tudo resolver problemas Vale (2003). Para o NCTM (2007), os estudantes, do 3.º ao 5.º ano, devem investigar padrões aritméticos e com figuras geométricas. Analisar a formação do padrão, o seu crescimento ou variação. Organizar esses dados de forma resumida e analisá-los para elaborar generalizações que envolva as relações matemáticas que aparecem.

Para Vale (2012), os padrões oferecem significados a expressões com números e as suas relações com representações com aparências podem possibilitar que os estudantes mais novos formulem conjecturas de modo intuitivo, fazendo uso da linguagem vernácula ou com símbolos, possibilidade de utilizar muitas formas para representar, propicia ocasiões para se expressar e dialogar através da matemática permite fazer generalizações, desenvolvendo assim o pensamento algébrico, colabora para um ensino e aprendizagem de matemática mais agradável.

Representações matemáticas

Para Vergnaud (1987) a representação é um elemento crucial para uma teoria do ensino e aprendizagem da matemática, não só porque o uso de sistemas simbólicos é tão importante em matemática, a sintaxe semântica dos quais são ricos, variados e universais, mas também por duas fortes razões epistemológicas: (1) A matemática desempenha um papel essencial na conceituação do mundo real; (2) a matemática faz um amplo uso de homomorfismos em que é essência a redução das estruturas entre si.

Goldin (2008) argumenta que os indivíduos podem construir representações das seguintes formas; (a) linguagem falada e escrita; (b) gesto icônico, desenho, representação pictórica, produções musicais e rítmicas; (c) fórmulas e equações matemáticas; (d) expressões de objetivos, intenção, planejamento, estruturas de decisão; e (e) contato visual, expressões faciais, linguagem corporal, contato físico, lágrimas e risos e exclamações que transmitem emoção.

Canavarro e Pinto (2012a) consideram que é muito significativa a exploração por parte do professor das representações icônicas desenvolvidas pelos estudantes. Porque essas têm um papel muito relevante para interpretar e resolver o problema por parte dos alunos. Além disso, as representações icônicas possibilitam que o professor compreenda com os seus alunos pensaram. Canavarro e Pinto (2012b). Para Valério (2005), as representações icônicas aparecem etapa de início da resolução do problema. Para ele, as representações icônicas poderão ser uma mera maneira relacionar o problema com a realidade.

Goldin (2008), uma representação é uma adaptação que pode representar algo de várias formas. Por exemplo, de forma verbalizada é possível representar um objeto da realidade. Um algarismo pode representar a quantidade de objetos de um conjunto. De acordo com Duval 2012, a solução de um problema de matemática depende da compreensão do seu significado e da conversão das representações escritas na linguagem natural para a linguagem simbólica. Valério (2005) esclarece que as representações feitas pelos alunos e as suas expressões verbais servem de sintomas para indicar ao professor se eles compreenderam qual era o objetivo proposto na tarefa. Esse fato é constatado à medida que eles esquematizam os dados do problema, alteram as suas representações para encontrar um resultado de modo mais eficaz ou demonstrar que não havia entendido o problema, quando eles representam um número verbalmente ou por escrito. Para Duval (2012), é impossível negar ou não usar a língua natural no ensino de matemática. A língua natural é uma representação muito importante, de forma particular, onde existe a possibilidade de se trabalhar com cálculos.

Segundo Valério (2005), os alunos criam representações diferentes com finalidades de representar funcionalidades diferentes. Essas finalidades podem ser; a passagem de um problema oral para a sua visualização, fazer uma ponte entre o concreto e o abstrato, a confirmação de resultados com uso de regras ou não. Em Kılıç (2017) encontramos que os alunos utilizam figuras e números para representar os padrões. No primeiro caso, ele denomina de padrões figurativos. No segundo, ele denomina numéricos. Os padrões numéricos podem ser lineares ou não lineares. Valério (2005) identifica dois tipos de representações por parte dos alunos. As informais e as formais. As informais são as representações são aquelas desenvolvidas de formas espontâneas pelos alunos para resolver os problemas.

Segundo Canavarro e Pinto (2012a), as representações icônicas são interessantes para que os alunos entendam os usos dos símbolos na matemática como uma forma de deixar a escrita mais sucinta e muito valorosa para a sua comunicação. Se acredita que representar padrões com figuras através seguindo padrões numéricos, têm potencial para contribuir para o problema dos alunos habilidades de resolução e pensamento algébrico. Além disso, a geração de padrões figurativos é uma maneira eficaz avaliar o conhecimento dos alunos sobre geometria e relações espaciais relacionado ao padrão Kılıç(2017).

Para Valério (2005), nas representações informais, aos alunos lança mãos de desenhos e esquemas. Essas representações partem da fase inicial e tendem a permanecer por tempo determinado período, até que o passar do tempo há uma evolução para na adequação das representações. Canavarro e Pinto (2012a) chamam a atenção para a importância que o professor deve dar o aproveitamento das representações deles, pois essas podem servir de ponto inicial para a simbologia e escritas matemáticas consagradas e as suas relações com as representações icônicas. Para Valério (2005), os alunos evoluem das representações informais para as representações formais. Pelo seu lado, para Canavarro e Pinto (2012), as representações espontâneas dos alunos não evoluindo, vão se transformando gradativamente das espontâneas para as formais. Canavarro e Pinto (2012b) afirmam que é preciso dar oportunidades para que os alunos socializem com os seus colegas e o professor o como e o porquê criaram uma determinada representação. Essa prática permite que eles entendam que existem maneiras distintas de pensar diferentes do pensamento deles e possibilita ao professor inovar a sua prática.

Curi e Santos (2012), a aprendizagem vem da relação que os alunos fazem com um mesmo objeto matemático e com os seus diferentes tipos de representação. Canavarro e Pinto (2012a), de início o professor deve permitir que os alunos criem representações livremente. Com o passar do tempo, o professor, deve criar situações para que os alunos percebam que os usos de símbolos podem tornar os seus raciocínios mais transparentes e ajudam a comunicá-los de forma mais eficaz (Canavarro & Pinto, 2012). Para Silva e Laburú (2011), a adoção de novas estratégias de um ensino não tradicional e o interesse nos estudos das representações próprias dos alunos são exemplos de abordagem que buscam meios para uma aprendizagem mais sólida por parte dos estudantes.

Estratégias e dificuldades de ensino e aprendizagem nas representações de generalizações matemáticas envolvendo sequências pictóricas

Para Robertson e Taplin (1995), as crianças evoluíram a capacidade de reconhecer generalizações a partir de padrões especiais das seguintes formas. Unistrucional: Partiram das generalizações externas do padrão, contando qualquer número ou escolhendo múltiplos para encontrar um padrão. Multinstrucional: Reconhece os padrões e os seus usos para determinar termos específicos, parte do primeiro termo e calcula outro termo. Relacional: Reconhecem os padrões e os utiliza para prevê qualquer termo diretamente sem começar pelo primeiro necessariamente, entretanto não há a articulação da generalização em termos formais.

Pelo seu lado, Radford (2010) apresenta de forma geral, uma síntese dos seus trabalhos envolvendo os quatro tipos de generalizações padrões feitas por alunos. Generalização aritmética. Generalização algébrica ou factual. Generalizações contextuais. Generalização simbólica. Na primeira, os alunos generalizam alguns casos, sem poder expressar todos os termos da sequência. Na segunda, os alunos são capazes de fornecer uma expressão para todos os termos. Na terceira, as expressões são mais curtas e formais. Em Mestre (2014) encontramos exemplos de estratégias de generalização aritméticas, algébricas, contextuais para a promoção do pensamento relacional. Entretanto, a autora também não deixa de apontar que os alunos usaram com estratégias de generalização, generalizações de nível inferior e superior, e generalizações globais. Já as representações simbólicas são ilustradas em

Morais(2014). Para a autora, um exemplo foi a utilização por parte dos alunos em sequências repetitivas à medida que eles relacionavam a sequência numérica a pictórica. Os alunos também usaram representações simbólicas quando recorreram aos algarismos.

De acordo com os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* NCTM (2007) os estudantes apontam padrões oralmente e os representam utilizando tabelas os símbolos. Buscam e utilizam relações entre quantidades que variam, para fazer previsões. Fazem e explicam generalizações que se mostram válidas em casos particulares. Usam gráficos para explicar padrões e dizer o que vai acontecer. Exploram propriedades da aritmética. Inventam e usam dialetos próprios. Usam símbolos convencionais e variáveis para representar um padrão, uma generalização ou uma situação.

Segundo Moraes (2012),os alunos usaram muito a linguagem natural, tanto na forma oral como na escrita. Mestre (2014) também constatou o uso desse tipo de representação. Para a autora, a linguagem natural e a representação simbólica alfanumérica foram as mais usadas pelos alunos para representar a generalização. Mas os alunos também utilizaram; diagramas ou esquemas, representações numéricas e tabelas, desenhos, linguagem sincopada, expressões numéricas, linguagem simbólica e representações idiossincráticas.

Em Ponte e Quaresma (2014), encontramos que quando há uma abordagem exploratória em que os alunos são encorajados a desenvolver suas próprias estratégias, ser maleáveis nas muitas representações, a expor os seus pensamentos, os alunos compreende aspectos relevantes a temas matemáticos com especial destaque a generalização e a justificação. Para Alvarenga e Vale (2007), quando os estudantes trabalham com tarefas que exploram padrões, eles desenvolvem diversas capacidades para identificar e explicar o padrão.Vale (2012), as tarefas de padrão dão indícios que os alunos buscam utilizar formas alternativas de estratégias de abordagem. Isso tendo sido mais evidenciado no 1º ciclo.

Morais (2012) opta por trabalhar tarefas exploratórias com materiais manipuláveis em virtude de ser um trabalho com alunos do 2.º ano de escolaridade. Nesse estudo, os alunos usaram representações externas ativas em sequências pictóricas repetitivas crescentes, exceto em uma tarefa. Para ela, a representação externa ativa é evidenciada quando os alunos recorrem aos dedos das mãos como material de contagem e/ou com ajuda na explicação verbal dos seus pensamentos e, também, quando há o uso

de tabelas desenvolvendo o pensamento relacional. Os alunos utilizam o pensamento recursivo de forma mais fácil para descobrir um termo próximo e fazer a sua generalização. Pelo seu lado, Barbosa (2009) identifica cinco estratégias de generalização usadas pelos alunos: (1) contagem. (2) termo de unidade. (3) diferença. (4) explícita. (5) tentativa e erro. A autora chama atenção para o fato que as estratégias que os alunos mais usam são de dois tipos: a contagem e a explícita.

Para Vale (2012), as tarefas que abarcam sequências demonstram a maneira como se expressar a generalização pode ser trabalhado com níveis de ensino fazendo um paralelo com a aritmética e a álgebra possibilitando assim o raciocínio funcional. Kılıç(2017) indica que, para representar um padrão figurativo através de uma sequência numérica não linear, os alunos usaram figuras geométricas distintas. Basawapatna, Koh e Repenning (2003), para estudar o termo geral de uma sequência de números naturais partindo do seu termo geral é necessário que haja um entendimento do padrão desse termo a sua descrição na forma algébrica. Para Alvarenga e Vale (2007) para encontrar padrões, os alunos prolonga-o até o termo seguinte ou até os termos que estão adjacentes. Determina o valor numérico de termos específicos do padrão e continuá-lo para responder a tarefa proposta. Para Branco, Ponte e Matos (2009), é frequente encontrar nas investigações as seguintes quatro estratégias que os alunos usam para explorar as sequências. (1) Estratégia de representação e contagem. (2) Estratégia aditiva. (3) Estratégia do objeto inteiro. (4) Estratégia da decomposição dos termos.

Para Guimarães e Teixeira (2011), exibido o termo de uma sequência, coerente com a regularidade que a forma, os alunos entendem o termo seguinte, ao tomar, por exemplo, o termo dado. Esse procedimento permite aos alunos a interpretação e identificação dos termos próximos e a sua determinação, expressando assim de forma oral ou escrita a identificação de uma regularidade.

No estudo de Moraes (2012), ao trabalhar com sequências repetitivas e com sequências crescentes, os alunos usaram representações externas icônicas. Os alunos usaram essa estratégia toda vez que reproduziam as sequências que foram apresentadas a partir de desenhos. Neste estudo, que assentou num trabalho com tarefas exploratórias com o objetivo de explorar regularidades, houve maior visibilidade a predisposição dos alunos recorrerem a estratégias de generalização construtiva de representação e contagem para determinar termos que estão mais próximos. Porém, a autora chama a atenção que não há evidência de generalização de caráter global.

Na investigação de Mestre (2014), no trabalho realizado com alunos para o desenvolvimento relacional, estes usaram, sobretudo o pensamento aritmético e em valores muito próximos o raciocínio contextual e o raciocínio global. Os alunos também apresentaram níveis de generalização algébrica. No trabalho de Moraes 2012, além dessa última representação, também há registro das estratégias construtivas aditivas e destrutivas, do objeto inteiro feitas pelos alunos.

Para Kılıç(2017), no seu estudo, os alunos fazem mãos de estratégias visuais e não visuais. Desenhos são uns exemplos de estratégia visual. Enquanto que o uso de números é um tipo de estratégia não visual. Vale (2012), tarefas que abordam padrões de crescimento, os alunos utilizaram como estratégias abordagens com figuras e números, entretanto o ponto inicial sempre foi o recurso visual. Para Barbosa (2009), tarefas que permitem para a exploração em contextos visuais propiciam o aparecimento de múltiplas estratégias de generalização por estudantes de diferentes idades, para resolver problemas envolvendo padrões, possibilitando assim, um raciocínio mais flexível.

Barbosa (2009) utilizou tarefas com impactos visuais. Para a autora, esse tipo de tarefa leva ao uso de múltiplas abordagens para chegar a generalizações. Elas dão suporte para que os alunos apliquem estratégias de natureza visual ou escolham estratégias não visuais, possibilitando assim a mudança para o contexto aritmético. De acordo com Vale (2012), as tarefas que envolvem contagens visuais possibilitam que os estudantes tenham uma forma mais variada de olhar para as contas. Eles podem optar por estratégias que mais se adéquem aos seus objetivos. O mais importante é que eles entendem o que as expressões numéricas significam e fazem generalizações quando passam para as sequências. Eles generalizam os termos mais distantes na linguagem natural ou com símbolos.

Barbosa (2009) categoriza as estratégias usadas pelos alunos de acordo com a sua natureza em dois grupos: (1) visuais. (2) não visuais. No tipo 1 está: contagem, termo unidade com ajuste visual, múltiplo da diferença com ajuste e explícita. As estratégias termo unidade sem ajuste. No tipo 2 vem: termo unidade com ajuste numérico, recursiva, múltiplo da diferença sem ajuste e tentativa e erro.

De acordo com Warren (2005), os alunos dos anos iniciais tiveram um melhor desempenho em padrões que envolvem repetições do que crescimento. Os padrões repetidos eram observados através de um ponto de partida. Os alunos têm preferências por estratégias aditivas. Alunos dos anos iniciais são capazes de realizar generalizações.

Segundo o NCTM (2007), o professor pode solicitar que os alunos expressem oralmente ou utilizando símbolos matemáticos os padrões que percebem. Os professores devem ainda incentivá-los a fazer previsões em relação ao que acontece com aquelas sequências no futuro, sendo este próximo ou distante.

Para Lannin (2003), o professor precisa estimular que algumas respostas são apenas válidas em algumas situações. O fato de que os alunos de não ter sido desenvolvido junto aos alunos a cultura de justificar as suas generalizações e o hábito de recorrer a exemplos específicos podem ser um agravante para que eles sintam dificuldades. Martínez (2005), abstrair e generalizar são ações do pensamento humano e genuíno da matemática. Ele aponta outro fator de dificuldade. Para obter um termo geral de uma sucessão de números naturais é preciso reconhecer o padrão, abstraí-lo e representá-lo de forma algébrica. Esse é um obstáculo muito grande para crianças em idade escolar. Outra dificuldade também é apontada por Kılıç(2017), a estratégia recursiva visual precisa que a sequência seja ampliada tomando como base os termos anteriores. Por isso pode ser um fator de dificuldade para os alunos. Branco e Correia (2016), em um trabalho com sequências pictóricas, os alunos demonstram dificuldades em expressar generalizações. Para fazê-las, eles utilizam a estratégia de apelar para uma figura particular e colocar em prática as regras que não conseguem apontar sem um referencial concreto. Radford (2010), a generalização de uma sequência numérico-geométrica exigiu dos alunos percebam quais são os padrões para encontrar os termos da sequência. Os alunos sentem dificuldades para partir de termos iniciais para mais sofisticados.

Segundo Barbosa (2009), apesar de, na maioria das vezes, a estratégia da contagem conduzir ao êxito, existem situações em que os alunos não a utilizam de forma correta. Em virtude da morosidade dessa estratégia, existe a possibilidade de soluções não são adequadas ou contagens incorretas. Aliado a isso, os alunos relacionam a deduções que só servem apenas para casos particulares, mas eles as generalizam. A autora aponta dois fatores geradores de dificuldades que envolvem a estratégia da contagem, dois em relação à estratégia de diferença e mais dois em relação às estratégias explícitas. Em relação à primeira, (1) A morosidade do processo da contagem, em virtude do elevado número de elementos do desenho; (2) As limitações físicas da folha de papel. Em relação à segunda, (1) a ordem da grandeza do valor que quer achar pode levar a exaustão; (2) A utilização indevida da exploração dos padrões. Em relação terceira, (1) o trabalho em contexto puramente numérico, levando a

confundir os valores atribuídos as variáveis dependentes e independentes. (2) as capacidades pouco desenvolvidas dos alunos para visualizar figuras, no espaço. A autora ainda acrescenta que a estratégia termo unidade não leva muito ao sucesso e argumenta que a aplicação não devida do raciocínio proporcional subjacente leva a esse insucesso.

Morais (2012) aponta as seguintes dificuldades para o trabalho com sequências pelos alunos: (i) dificuldades de interpretar, relacionada com o modo peculiar de cada um observar a sequência; (ii) a utilização da nomenclatura dos números ordinais; (iii) a dificuldade de representar não percebendo o que se altera para termo seguinte; (iv) a falta de atenção ao enunciado; (v) dificuldades de análise, compreensão, reprodução e criação de sequências; (vi) dificuldades em verificar o que tem de semelhante entre os termos da sequência e o seu sucessor; (vii) dificuldades para expressar outras estratégias além que vão além das de representação e contagem; (viii) dificuldades de representar termos mais distantes; (ix) dificuldades de comunicação; e (x) dificuldades em argumentar.

CAPÍTULO 3

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

O presente capítulo descreve a experiência de ensino, nomeadamente no que respeita às tarefas usadas, organização geral e planeamento da experiência. Segundo Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003), uma experiência de ensino deve levar em consideração os cinco aspectos que se integram para formar o todo: (1) As tarefas ou problemas; (2) Os tipos de discurso; (3) As regras de participação; (4) Os recursos materiais; e (5) Os meios práticos para que esses termos se entrelacem. O presente projeto, como já foi referido, envolve o trabalho com sequências lineares tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As tarefas da experiência de ensino

Para o Ministério da Educação (2001), ser competente em matemática abarca, dentre outras atitudes, a predisposição para pensar matematicamente, ou seja, envolve a exploração de situações problemáticas, ir em busca de regularidades, criar e avaliar conjecturas, fazer generalizações e pensar de forma lógica. Por seu lado, Stein e Smith (1998), argumentam que alunos que se envolvem com tarefas que tem um nível cognitivo mais elevado, têm ganhos significativos em suas aprendizagens.

Em Ponte (2005) encontramos características para diferenciar as tarefas de acordo com duas dimensões: (1) o desafio matemático; e (2) a estrutura matemática. De acordo com o primeiro, a tarefa pode ser de grau reduzido ou elevado. Já de acordo com o segundo, as tarefas podem ser fechadas ou abertas. A tarefa é fechada se no seu enunciado se encontra de forma explícita o que é dado e o que é pedido. Será aberta se o que for dado, pedido ou ambos os casos não estejam tão explícitos. Ponte (2005) identifica as tarefas de acordo com os seus graus de desafio e a sua estrutura em quatro tipos (1) exercícios. (2) tarefas de resolução de problemas. (3) tarefas de exploração. (4)

tarefas de investigação. A primeira tem um desafio reduzido e natureza fechada. A segunda tem nível elevado e natureza fechada. A terceira tem nível reduzido e natureza aberta. A quarta tem nível elevado natureza aberta. As tarefas exploratórias, por sua vez, são um viés forte para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade (Branco & Ponte, 2012; Cerca2014; Moraes, 2012).

Segundo o Ministério da Educação (2001), de acordo com a maturidade de cada aluno, a competência matemática deve desenvolver diversos tipos de experiência de aprendizagem como; resolução de problemas, atividade de investigação, realização de projetos, jogos, realização de trabalhos de matemática, comunicação matemática, prática compreensiva de procedimentos, exploração de conexões. As tarefas podem ser classificadas de acordo com a sua duração em três tipos: (1) curto prazo; (2) médio; e (3) longo prazo. As tarefas de exploração, investigação e os problemas são tarefas de médio prazo (Ponte, 2005). Segundo Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007) os padrões são formas poderosas para a abordagem de álgebra nos primeiros anos, ao nível da sala de aula, a atividades de resolução de problema e de preferência com tarefas de investigação. Para o NCTM (2007), nos anos iniciais, as atividades de classificação devem servir de base para os trabalhos que envolvam padrões. Para eles, as sequências que se repetem no cotidiano como som e cor, por exemplo, auxiliam os alunos menores a desenvolver conceitos introdutórios que envolvem padrões. Branco e Correia (2015) indicam que, para escolher as tarefas com sequências pictóricas, o professor deve observar as suas características. Se a sequência é de crescimento ou repetição, a estrutura matemática da sequência, ou seja, se quando a sequência é crescente os seus termos pictóricos estão evidentes. Os questionamentos levantados pelo professor, a série dos alunos e a experiência e a vivência que tem com tarefas exploratórias.

Para o Ministério da Educação (2001), nos variados tipos de experiências, o professor deve considerar como aspectos transversais; a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões. As eles deve ser dada a oportunidade ampla de ter como recursos, o uso das tecnologias e utilização de materiais manipuláveis. Pimentel e Vale (2011) indicam que tarefas de exploração envolvendo padrões de repetição e crescimento possibilitam o estabelecimento de ligações dentro e fora da Matemática. Possibilitam que os estudantes entendam e relacionem vários aspectos matemáticos. Estas tarefas permitem generalizações que as expressões têm possibilidade de ser exploradas em níveis distintos e formas variadas, no quadro de uma aritmética generalizada.

Para Goldin (2008), no método tradicional de ensino, os padrões são valorizados para garantir, regras, funções e algoritmos matemáticos. Nesse método de ensino, em relação aos padrões, a capacidade dos alunos deve ser voltada para interpretá-los e aplicá-los. Segundo Blanton e Kaput (2008b), a algebrização da atividade da aula envolve a desconstrução de longos anos de prática de ensino que não se baseou de forma séria no raciocínio dos alunos incluindo os diversos processos de representação e simbolização que estes usam. Ponte e Serrazina (2004), em Portugal os exercícios aparentam ter uma dominação no trabalho em sala de aula. As tarefas de natureza aberta como, por exemplo, projetos, investigação e exploração ainda têm um papel tímido. Canavarro (2007), em relação ao pensamento algébrico, aponta alguns desafios para a gestão das aulas de matemática nos primeiros anos. A afetividade dos professores em relação à matemática. As tarefas matemáticas. A cultura da sala de aula. Segundo Goldin (2008), no ensino tradicional, os padrões são abordados de formas bem diretas em virtude da ênfase na aritmética, na correção das respostas dos alunos, na validação pelo professor e a pouca importância no uso de calculadoras. No entanto, para Canavarro (2007), a cultura do ensino direto não é favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Por outro lado, para Ponte (2005), no ensino exploratório, o professor assume um papel de incentivador. Ele propõe um ambiente para que os alunos descubram e construam o conhecimento. Como o objetivo geral desse estudo é compreender como o reconhecimento de padrões e regularidades, pode contribuir para a elaboração e investigação de seqüências lineares e não lineares no desenvolvimento do pensamento algébrico, irei seguir uma abordagem exploratória.

Organização geral da experiência de ensino

A experiência de ensino foi planejada em 8 sessões. Na primeira sessão, fiz um diagnóstico para perceber quais eram os conhecimentos prévios dos alunos em relação as seqüências e padrões. No final da experiência, realizei uma avaliação escrita para saber avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante o experimento.

Na primeira etapa, ou seja, nas sessões 2, 3 e 4, pretendi que os alunos adquirissem ou ampliassem os seus conhecimentos em seqüências pictóricas. Esperei também que eles se familiarizassem com a dinâmica do trabalho em pares e que desenvolvessem formas de se comunicar matematicamente. Na segunda etapa, isto é, nas sessões 5, 6 e 7, esperei que os alunos desenvolvessem estratégias para compreender

e representar os padrões. Na primeira bem como na última sessão, os alunos trabalharam individualmente. Com isso, busquei que os alunos mostrassem os seus conhecimentos prévios e procurei entender as suas aprendizagens, respectivamente. Nas sessões 2, 3, 4, 5, 6 e 7, os alunos trabalharam a pares ou em pequenos grupos para que houvesse uma maior interação entre eles. O ensino exploratório valoriza os espaços de reflexão e discussões coletivas, para a sistematização dos conceitos, a formalização e a realização de conexões matemática (Ponte, 2005), pelo que estas discussões tiveram lugar em todas as tarefas que foram realizadas na sala de aula.

Planejamento da experiência de ensino

Para Ponte (2005), o planejamento de um conjunto de aulas deve levar em consideração os seguintes aspetos: a seleção de tarefas adequadas, o conhecimento dos alunos, a estrutura física e humana da escola bem como o contexto social que a esta está inserida. Segundo Abrantes, Oliveira e Serazina (1999), o professor tem um papel de grande importância na criação de um ambiente que proponha tarefas para a aprendizagem dos alunos.

O Ministério da Educação (2001) orienta que os professores deverão desenvolver, dentre as suas diversas ações, organizarem atividades cooperativas de aprendizagem que objetivem a troca e integração. Além disso, de acordo com Ponte (2005), no ensino exploratório, as tarefas têm natureza aberta, os alunos relatam as suas estratégias, interagem uns com os outros e o professor tira proveito desses momentos. Dessa forma, as tarefas escolhidas têm as suas principais características a relação com o Pensamento Algébrico (Anexo2). Porém, não deixo de levar em consideração o ano de escolaridade, a idade dos alunos e o contexto social que estão inseridos.

Segundo Branco, Matos e Ponte (2009), nas sequências repetitivas e nas sequências crescentes há uma unidade que pode ser formada por um ou mais termos que se repete periodicamente. Na sequência repetitiva, apesar de que os termos que se repetem podem ser de difícil percepção para os alunos, ela é uma boa fonte para explorar representações, regularidades e generalizações. Já os termos da sequência crescente são diferentes. Eles dependem do termo anterior e da posição ocupada na sequência. As tarefas que pretendo desenvolver são baseadas neste trabalho.

CAPÍTULO 4

ESTUDO-PILOTO

Com o objetivo de averiguar a validade das tarefas, a adequação da faixa etária dos estudantes, os objetivos dos estudos e aperfeiçoar a experiência de ensino, realizei um estudo piloto. Nele, trabalhei com alunos de uma turma diferente. Nessa etapa, planejei implantar, na sala de aula, o estudo diagnóstico, para avaliar o desempenho individual deles e como se comportavam trabalhando com os seus pares.

O estudo-piloto foi realizado durante o mês de abril de 2019. As tarefas usadas encontram-se no ANEXO 2. Foram necessárias oito aulas, concedidas de acordo com a disponibilidade da escola e da professora regente. Cada aula teve uma duração aproximada de 50 minutos. A turma era composta por 23 alunos, com em média 10 anos de idade. Senti a necessidade de fazer este estudo para observar 6 aspectos que considere relevantes e responder a alguns questionamentos pessoais. Dentre eles destaco: (1) Ser o meu primeiro contato com a realidade em que a escola está inserida, ficando a conhecer aspectos como acesso, horário de chegada dos alunos, acústica e iluminação da sala de aula, horários de saída. (2) Estabelecer um contato mais próximo com os alunos, os professores, a gestão da escola e os funcionários, adquirindo assim mais confiança e menos estranheza com a minha presença na escola. (3) Saber se as tarefas propostas possibilitam compreender como o trabalho com padrões e regularidades e podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. (4) Antecipar algumas estratégias de diálogos, pois o que irá conduzi-los serão os questionamentos dos alunos. (5) Saber como superar algumas dificuldades em exercer um duplo papel de professor e investigador, pois apesar de já ter experiências em trabalhar com tarefas exploratórias só exercia o papel de professor. (6) Saber como fazer a gravação de vídeos e áudios com apenas um aparelho celular, pois estaria sozinho em uma turma diversificada com 23 alunos e tendo que atender o convite de todos para o diálogo.

O estudo-piloto permitiu chegar a diversas conclusões. Em primeiro lugar, fiquei sabendo que os estudantes chegavam à escola por volta das oito horas da manhã, uma vez que se trata de uma escola de uma cidade do interior do estado da Bahia. Enquanto uns vinham das adjacências da escola, outros vinham dos distritos, ou seja, regiões mais afastadas do centro. Enquanto uns vinham sozinhos, outros vinham acompanhados de seus pais. Enquanto uns vinham andando, outros vinham no transporte escolar cedido pelo município. Ao chegar à sala, eles geralmente pediam para beber água ou ir ao banheiro. Uns realmente sentiam essas necessidades fisiológicas, mas outros só usavam de tais argumentos para rever alguns colegas e colocar a conversa em dia. Esse é o intervalo de tempo necessário que preciso para aguardar alguns retardatários. Dessa forma, as aulas começavam de fato por volta das 08h10min da manhã.

Em relação às estruturas da sala de aula, elas foram convidativas ao trabalho docente. A escola era uma das do município que tinham parceria com a iniciativa privada e ajudava na manutenção do prédio. A densidade demográfica dos números e alunos sentados em suas carteiras não era muito elevada. Quero dizer com isso que foi possível juntar na sala de aula duas ou três carteiras e consegui trabalhar de forma confortável, permitindo a minha comunicação aluno com aluno, aluno com professor, dupla de alunos com professor e a minha circulação livre pela sala de aula.

A equipe docente e os funcionários da escola se mostraram muito interessadas e abertas para a minha proposta de estudo. Sempre muito bem receptiva me convidava para tomar café e percebi que aquele momento informal servia para que eles buscassem mais informações sobre o trabalho que estava realizando e a minha trajetória profissional. Enquanto no primeiro momento apresentei basicamente o Termo de Consentimento e Livre Esclarecimento (TCLE), ANEXO 3, no momento do café, percebia que as perguntas eram menos tímidas, como por exemplo, em que local eu morava ou trabalhava, alguns elogios e alguns desabafos pessoais e/ou profissionais. Percebi que esse momento foi de extrema importância para me aproximar mais da equipe, diminuiu assim a distância entre professores e pesquisador e adquirir a confiança de todos.

Entendi também que uma estratégia de aproximação e transparência era sempre deixar a porta da sala de aula aberta, para que todos pudessem observar o que realmente na prática eu estava fazendo. Essa estratégia também serviu para me aproximar da gestão da escola, porque por algumas vezes a diretora passava pelo pátio da escola, acenava de longe com um sinal de legal e me perguntava se estava tudo bem.

Perguntava se eu estava precisando de algo. Essa estratégia de abrir a porta da sala de aula também serviu para abrir o meu campo profissional. Fui convidado, pessoalmente, pelo secretário de educação do município para atuar como formador de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental, ele disse que ouviu falar que estava fazendo um bom trabalho. Logo após a minha primeira formação, também fui convidado pela diretora geral do Departamento Pedagógico da Secretaria Municipal de Educação (SEDUC), para trabalhar com professores dos anos iniciais e com a educação de jovens e adultos. Adquiri dessa maneira a confiança da SEDUC.

Desse modo, as tarefas escolhidas para o estudo piloto (ANEXO 2) tinham como objetivo compreender como o trabalho com padrões e regularidades em sequências, em uma experiência de ensino com alunos do 5.º ano de escolaridade de uma escola da rede pública de um município baiano pode contribuir para o desenvolvimento dopensamento algébrico.As tarefas selecionadas foram de natureza exploratória. O trabalho em cada aula foi dividido em três momentos: (1) Introdução a tarefa, momento em que lia a tarefa fazendo dessa forma o convite parainiciar da aula; (2) Exploração da tarefa, em dupla, caracterizado pela sua resolução por parte dos alunos; (3) Socialização das soluções, ou seja, discussão das respostas das duplas com toda a classe.

A primeira sessão teve como objetivo diagnosticar os conhecimentos os que alunos possuíam em relação ao tópico sequências. A tarefa utilizada possuía apenas dois tipos de objetos e tinha como atribuição a considerar o tipo de objeto. O seu objetivo era compreender a unidade que se repetia.

Os alunos utilizaram representações icônicas para representar a sequência, conforme a figura abaixo.

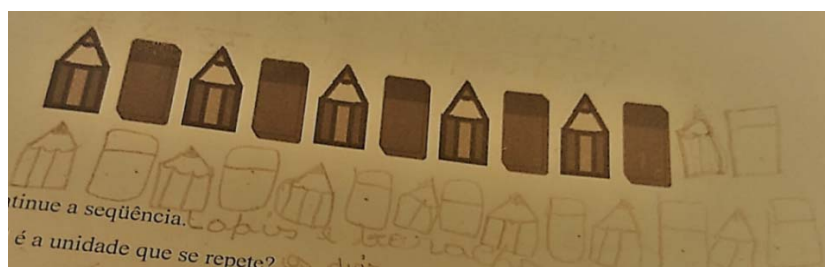


Figura 1. Representação usada pelos alunos para expressar a sequência formada por lápis e borracha.

Ao continuar a sequência desenhando um lápis e uma borracha, os alunos demonstraram que compreenderam qual é a sua lei de formação.

Para representar a unidade que se repete os alunos utilizaram a linguagem natural como se ver nas figuras abaixo.

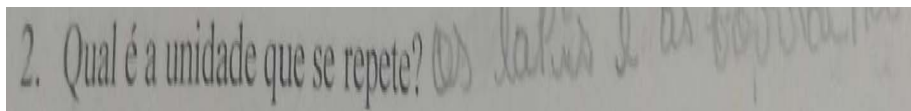


Figura 2. Questão 2 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos

Os alunos usaram como representação a linguagem natural, ao responder que a unidade que se repete é o lápis e a borracha.

A sessão 2 tinha como objetivo procurar regularidades e generalização. A tarefa era formada por uma sequência repetitiva com uma seta vertical ocupando a posição dos termos ímpares e uma seta horizontal ocupando os termos pares.

Os alunos demonstraram que reconheceram a sua regularidade ao utilizarem a representação da linguagem natural escrita de acordo com as figuras abaixo.

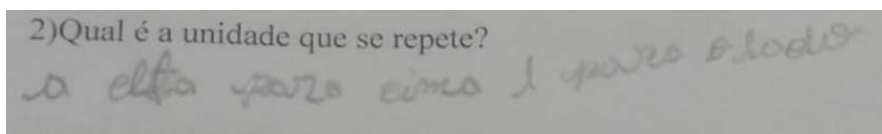


Figura 3. Questão 2 da tarefa 2 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos

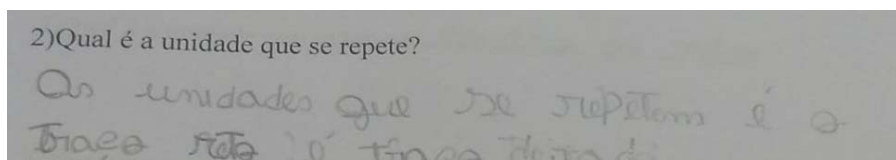


Figura 4. Questão 2 da tarefa 2 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos

Os alunos identificaram os termos que se repetiam ao nomear seta vertical de seta para cima ou traço reto e a seta horizontal de seta para o lado ou de traço deitado.

A sessão 3 tinha como objetivo explorar sequências finitas de números e levar os alunos a descreverem as regularidades que encontram, indicando a sua lei de formação. A tarefa tinha um quadro com números para que os alunos explorem e busque regularidades. Os alunos usaram a representação da linguagem natural para descrever as regularidades que encontraram.

1) Quanto aumenta cada número da esquerda para a direita?

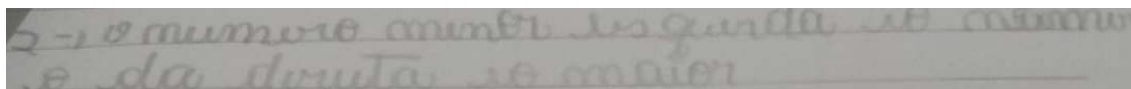


Figura 5. Resposta da questão 2 da tarefa 3 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos

Ao afirmar que o número menor é o da esquerda e que o número maior é o da direita, os alunos descreveram uma regularidade da tabela usando a linguagem natural ao identificarem que, nas linhas, da esquerda para direita os números sempre formam uma sequência crescente e da direita para esquerda os números sempre formam uma sequência decrescente.

A sessão 4 teve como objetivo explorar os números pares e ímpares. A tarefa tinha duas sequências. Uma com objetos que a quantidade representava números ímpares e outra que a quantidade representava números pares.

2) Crie uma sequência numérica e diga como ela é formada.

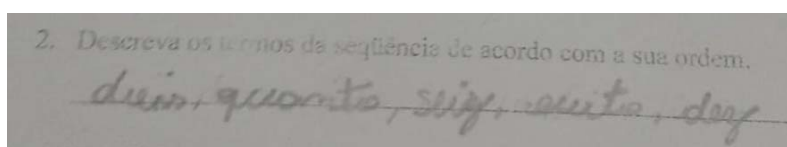


Figura 6. Questão 2 da tarefa 4 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos

Ao escreverem por extenso os números dois, quatro, seis, oito e dez, os alunos usaram a linguagem natural, apesar de não relacionar cada termo com a sua ordem.

A sessão 5 tinha como objetivo usar a reta numérica para fazer generalização. A tarefa continha uma reta numérica com os números 1, 4, 7, 10 e 13.

Para representar a sequência, os alunos desenham uma reta numérica:

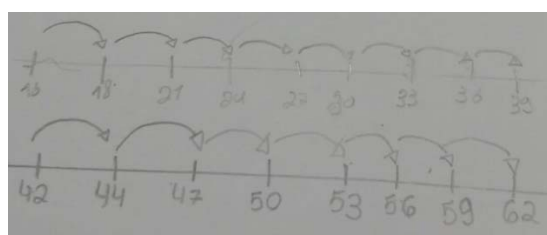


Figura 7. Desenho da reta numérica feito pelos alunos

Ao afirmar que para descobrir sequência, foi preciso pular de 3 em, os alunos utilizaram a linguagem natural, para esclarecer que ao somar os números tendo o três como razão da sequência, foi possível determinar os seus próximos elementos. Conforme a figura abaixo.

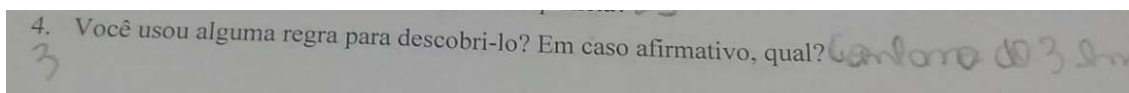


Figura 8. Questão 4 da tarefa 5 com a representação da linguagem natural escrita e simbólica feita pelos alunos

A sessão 6 tinha como objetivos compreender a unidade que se repetia ciclicamente e analisar sequências crescentes. A tarefa tem uma sequência mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescente:

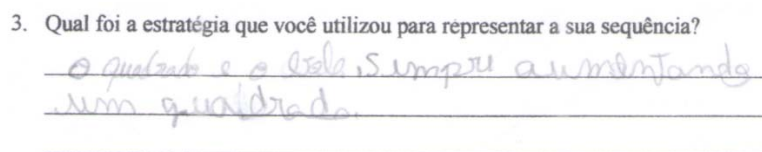


Figura 9. Questão 3 da tarefa 6 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos

Ao afirmar que a estratégia usada por eles para representar a sua sequência foi reproduzir o quadro e a bola, os alunos usaram da linguagem natural para afirmar que a sequência é formada por dois objetos, ou seja, um quadrado e um círculo e que o quadrado sempre aumenta uma unidade.

A sessão 7 tinha como objetivo estabelecer a relação entre cada elemento da sequência. A tarefa tinha como atributo três elementos que se repetiam.

Os alunos usaram a linguagem simbólica para formar as possíveis ordens para os elementos da sequência:

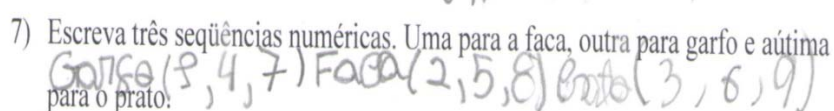


Figura 10. Questão 7 da tarefa 7 com a representação simbólica feita pelos alunos

Na tarefa 8, Sequências para avaliar, o objetivo era avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante a experiência de ensino e quais foram as suas limitações. Para tanto, entreguei uma folha de papel em branco e solicitei que eles fizessem a sua própria sequência. Dei sugestões para que eles criassem as suas próprias questões e pedi para que os seus colegas as resolvessem. Para elaborar as sequências, os alunos utilizaram representações icônicas, com objetos como coração, setas, círculos e quadrados, por exemplo.

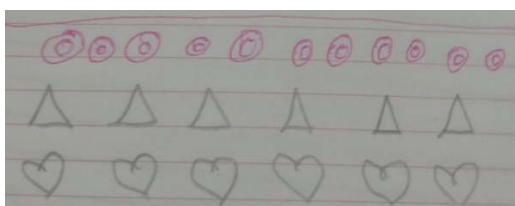


Figura 11. Representações icônicas, com objetos como coração, setas, círculos e quadrados

Para criar as questões, eles utilizaram o recurso da memorização e propuseram questões similares as das tarefas que haviam resolvido anteriormente, como, por exemplo; continuar a sequência, criar uma sequência, dizer qual será o elemento x. Para responder às questões, os alunos tomaram por base as sequências dadas e as estratégias aprendidas nas aulas anteriores, usando a linguagem natural e as representações icônicas:

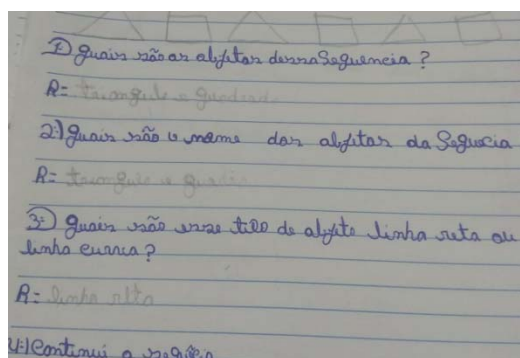


Figura 12. Representações icônicas e linguagem natural escrita feita pelos alunos

Além disso, percebi que deveria ter deixado espaço entre as questões. Os alunos sentiram dificuldades em usar os espaços em branco e o verso da folha de papel. Com

isso a todo instante solicitavam a minha presença para saber onde responder. Esse tempo poderia estar sendo investido de forma mais rica. Além dos espaços, percebi que deveria ter feito linhas entre as questões, pelo fato de os alunos não terem ainda a coordenação motora muito bem desenvolvida, eles perdiam tempo desenhando as linhas com a régua e o lápis e esse era fator de cansaço, distração e desvio do objetivo

Em relação ao dilema de exercer um duplo papel de professor e investigador, percebi que poderia solucioná-lo da seguinte forma; enquanto estivesse interagindo com os alunos para encorajá-los a desafiá-los a criar meios de responder às questões das tarefas, exercerei o papel de professor. Enquanto fosse registrar e analisar os dados, exerci o papel de pesquisador.

Em relação aos registros de áudio e vídeo, entendi que poderiam ser gravados os momentos de discussão nos grupos ou no momento da socialização. Isto é, toda vez que percebi que houve um diálogo entre os alunos ou entre os alunos e o professor em que eu não conseguia registrá-lo ou memorizá-lo, os registrei com o uso do aparelho celular, não havendo assim a preocupação em gravar toda a aula.

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este capítulo apresenta e justifica as opções metodológicas gerais seguidas na realização desta investigação e o design. Faz também referência à experiência de ensino, seleção dos participantes, instrumentos de recolha de dados e processos de análise de dados. Refere também os aspetos éticos envolvidos no estudo e a calendarização.

Opções metodológicas

Para Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa possui 5 características: (1) Os dados são recolhidos de forma direta em ambiente natural e o pesquisador é o instrumento principal; (2) É uma investigação descritiva; (3) Os pesquisadores valorizam mais os processos do que os produtos; (4) Há uma tendência para a análise indutiva dos dados; e (5) Na abordagem qualitativa, os significados são muito importantes.

O ambiente em que é desenvolvida essa pesquisa é a sala de aula que assume um cenário propício para investigação. Durante oito sessões, é executada em sala a experiência de ensino pela qual são propostas aos alunos tarefas de exploração. Eles são convidados a trabalhar em pares, sendo estimulados a interagir, comunicar, socializar e formalizar os seus raciocínios.

Para Bogdan e Biklen (1994) em uma pesquisa qualitativa, os dados podem ser imagens, gestos, palavras, documentos, e são descritos detalhadamente e interpretados pelo pesquisador. Neste estudo, o principal instrumento de pesquisa é o investigador. Ele exerce um duplo papel de professor e investigador e busca descrever e interpretar os dados a partir de casos particulares atribuindo-lhes significadas. Dessa forma, observando essas características e tomando como fundamento Bogdan e Biklen (1994), essa pesquisa é qualitativa de caráter interpretativo.

A modalidade de estudo escolhida é a experiência de ensino. Segundo Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003), uma experiência de ensino é realizada para desenvolver e não apenas confirmar teorias. Essas teorias têm como objetivo a aprendizagem específica de domínios processuais. Essas aprendizagens incluem tarefas ou problemas que os alunos são convidados a responder. Para os autores, os *designs* de experimentos variam com o tipo e a finalidade. Eles podem ser de 5 tipos: (1) Experiências de *designum-a-um*; (2) Experiências de sala de aula nas quais uma equipe de pesquisa colabora com um professor; (3) Experiências de desenvolvimento de professores em serviço em que uma pesquisa equipe ajuda a organizar e estudar a educação de futuros professores; (4) Estudos de desenvolvimento de professores em serviço nos quais os pesquisadores colaborar com os professores para apoiar o desenvolvimento de comunidade profissional; e (5) Experiências de reestruturação de escolas e distritos escolares em que uma equipe de pesquisa colabora com professores, administradores escolares, e outras partes interessadas para apoiar mudança. De acordo com o tipo e a finalidade, nesse trabalho será realizado o 1.º tipo. Nele, há interação entre o professor, que é o experimentador, e os alunos. Há realização de sessões de ensino para criar uma ecologia para a aprendizagem possa ser estudada com detalhe e profundidade.

Participantes

Os participantes, além de mim, que desempenhei o duplo papel de professor e de investigador, foram alunos dos anos iniciais que estão cursando o 5.º ano de escolaridade. O estudo foi realizado em uma unidade escolar da rede municipal de ensino, de uma cidade, na Bahia, Brasil, uma escola dos anos iniciais e finais do ensino fundamental. A escola funciona durante os três turnos e tem em média 1.000 alunos matriculados. A escola está inserida em local violento, em virtude das condições sociais do contexto em que está inserida, sendo os alunos provenientes desse local.

Métodos de recolha de dados

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) em uma pesquisa qualitativa os pesquisadores utilizam vídeos, áudios, blocos de notas. Todos, esses recursos também serão usados nesse trabalho. Os dados recolhidos são de natureza descritiva.

Observação. Segundo Cohen e Manion (2007) o observador é um membro do grupo, participa das suas atividades, o grupo reconhece as suas intenções de investigação, recolhe os dados com objetivos de investigação e permite ter acesso a motivos e agendas escondidas. Observar os participantes de uma forma direta possibilita ao observador perceber comportamentos como gestos, por exemplo, daqueles que são estão sendo observados (Quivy&Campenhoudht, 2005).

Sendo assim, utilizei além da minha memória, recursos de gravação de áudio e vídeos, notas de campo. Tendo em vista a estruturação do ato de observar, elaborei uma grelha de observação, delimitada por seis itens: (i) dados gerais, (ii) recursos utilizados, (iii) atividades desenvolvidas pelo alunos, (iv) estratégias de implementação pelo professor, (v) observação das atividades desenvolvidas, e (vi) dificuldades enfrentadas pelos alunos

No item (i), pretendi registrei as características gerais de cada participante como: idade, desempenho escolar, forma como socializava com os seus pares. No item (ii), registrei quais recursos foram utilizados pelo participante para desenvolver as suas estratégias. No item (iii), registrei as atividades desenvolvidas pelos alunos e por mim, ou seja, qual foi o papel exercido por cada um, no decorrer das discussões. No item (iv), registrei as formas que de diálogo que utilizei para que houvesse a maior percepção dos alunos naquilo que era esperado deles, como interpretei e avaliei as suas respostas. No item (v), registrei o que foi desenvolvido em cada questão pela dupla. No item (vi), registrei as dificuldades diversas que esses alunos tiveram, ou seja, se essas dificuldades foram interpretativas, de interação com os seus pares, se foi na conversão do registro da linguagem simbólica para a linguagem formal e outras que possam surgir. Caso não conseguisse compreender algo, selecionaria alguns alunos e faria entrevistas com eles.

Análise de dados

A análise de dados foi feita através de análise de conteúdo. Para Bardin (2011), a análise de conteúdo deve levar em consideração as seguintes etapas: (1) pré-análise. (2) exploração do material e tratamento de dados. (3) a interpretação. Na primeira etapa, visitei novamente de forma profundas as fontes que usei para que surjam novas ideias na aplicação das tarefas. Na segunda, resolvi tarefas distintas das selecionadas para se fosse necessário for redefinir os objetivos. Na terceira, busquei interpretar os dados produzidos pelos alunos e separá-los por categorias.

Questões éticas

Porém, antes de iniciar a recolha de dados, pedi autorização do gestor escolar, em seguida enviei um comunicado para os responsáveis solicitando a autorização para que os alunos participem da experiência de ensino. Depois, informei para os estudantes sobre o objetivo da experiência de ensino. Pedi pra que eles escolham pseudônimos e avisei que eles não terão os seus verdadeiros nomes revelados nem as imagens dos seus rostos, bem como os seus áudios e o local da pesquisa.

Calendarização

O presente estudo foi dividido em algumas fases levando em consideração o 2.º ano do mestrado e o calendário letivo da rede municipal de ensino. Essas fases foram interligadas entre si formando um todo. A primeira fase foi dedicada à revisão de literatura e a busca de um enquadramento teórico. A segunda correspondeu à escrita do projeto. A terceira foi referente ao projeto piloto. A quarta disse respeito à execução da experiência de ensino e a análise de dos dados. A quinta foi em relação à escrita do trabalho. A sexta disse respeito à revisão e entrega do texto. Esses dados são representados no quadro que segue no ANEXO 1.

CAPÍTULO 6

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO NA SALA DE AULA

Aula 1 – Diagnóstico: Exploração da uma Sequência Repetitiva com dois objetos

No dia 21 de maio de 2019, desenvolvi a primeira tarefa exploratória. Na aula estavam presentes 18 alunos, 10 meninas e 8 meninos que foram orientados a trabalhar em dupla, totalizando dessa forma 9 grupos. A aula durou cerca de 1 hora.

Realização da tarefa na aula

Iniciei a experiência de ensino cumprimentando a todos, me apresentado e explicando aos alunos qual era o meu objetivo. Pedi que sentassem em dupla, entreguei a tarefa, expliquei como procederíamos, pois seria uma forma inovadora de trabalho para eles, fiz o convite ao ler o enunciado da tarefa e dei um tempo para que eles a explorassem.

A primeira tarefa proposta aos alunos tinha a função de diagnóstico e envolvia uma sequência repetitiva. A unidade que se repete é formada por dois elementos: Um lápis e uma borracha:

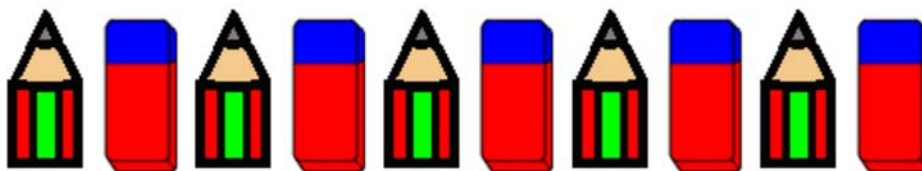


Figura 13. Sequência repetitiva formada por lápis e borracha

Fonte: Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC

Representações usadas pelos alunos

A primeira questão da tarefa solicitava que os alunos continuassem a sequência. Para responder eles utilizam a representação icônica conforme mostra a figura abaixo:

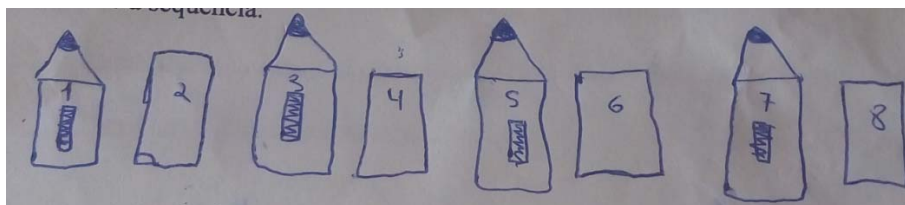


Figura 14. Representação icônica usada pelos alunos formada por lápis e borracha

A segunda questão perguntava qual a unidade que se repetia. Para respondê-la, os alunos precisavam compreender a regularidade da sequência. A representação usada para que demonstrarem tal compreensão foi a linguagem natural, escrevendo que unidade que se repete era o lápis e a borracha.

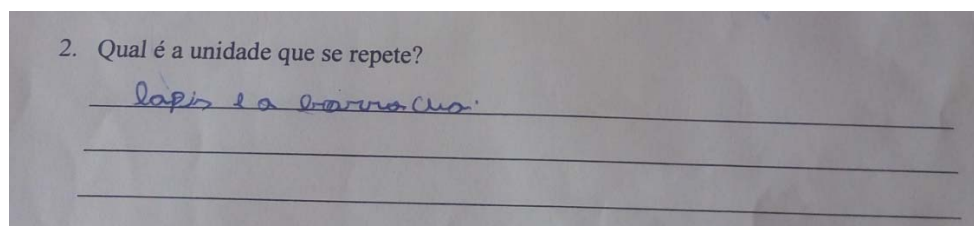


Figura 15. Questão 2 da tarefa 1 e a respectiva resposta dos alunos usando a representação da linguagem natural escrita

Respostas e dificuldades dos alunos

A terceira questão solicitava que os alunos compreendessem que o lápis sempre ocupava uma ordem ímpar e que a borracha sempre ocupava uma ordem par. Percebi que os alunos ainda não haviam entendido esse fato. Por esse motivo, fui interpelado por uma dupla de alunas (que escolheram como os seus pseudônimos Larissa Manuela a Maria Sofia). Iniciamos o seguinte diálogo:

Larissa Manuela: Professor, nós não sabemos o que é para fazer nessa questão.

Professor: Você já conversou com Maria Sofia sobre a questão? Vocês podem falar sobre ela.

Maria Sofia: Ela já, professor, Mas eu também não sei.

Professor: Vocês já leram a questão?

Larissa Manuela: Já, professor. Mas não entendemos.

Professor: Se vocês tivessem que dar um número para esse lápis (aponte com dedo indicador para o primeiro lápis da sequência) que número seria?

Larissa Manuela: O número 1.

Professor: E esse? (Aponte com dedo para a segunda borracha da sequência.)

Larissa Manuela: Número 2.

Procedi assim encorajando as alunas a explorar a sequência. Dessa forma, elas usam a linguagem simbólica e fizeram a seguinte representação:

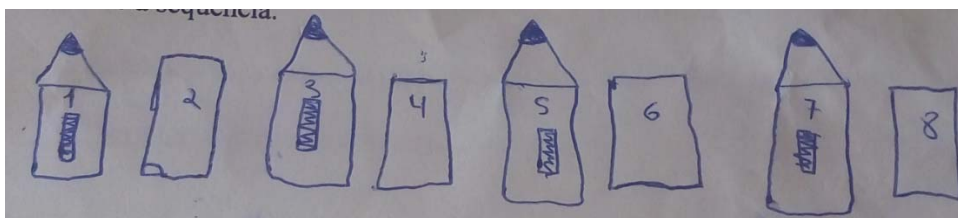


Figura 16. Uso da linguagem simbólica para responder a questão 3 da tarefa 1

Apesar de ter atribuído ao lápis números ímpares e à borracha números pares, percebi que as alunas ainda sentiam dificuldades em encontrar um elemento qualquer da sequência dada a sua posição, por ter confundido o termo unidade com a classificação de um algarismo que compõem um número de acordo com sua classe e ordem:

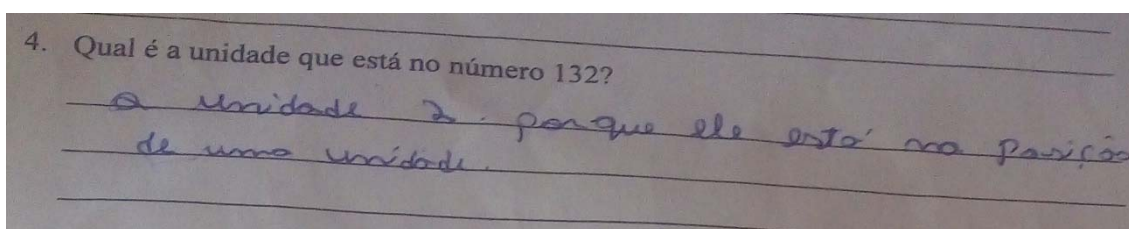


Figura 17. Questão 4 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos usando a representação da linguagem natural escrita

Embora tivessem entendido que o lápis era sempre um número ímpar e que a borracha era sempre um número par, as alunas demonstraram dificuldades em determinar o objeto que estava na posição 324 por dois motivos: (1) Elas não

reconheceram número como sendo um número formado por 3 centenas, 2 dezenas e 4 unidades, ou então apenas por 324 unidades, mas sim como os números, 2, 3 e 4 separadamente; e (2) A não classificação de um número como par ou ímpar de acordo com os Algarismos das unidades que o compõe:

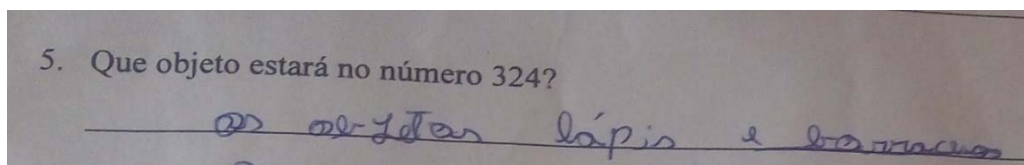


Figura 18. Questão 5 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos usando a representação da linguagem natural escrita

Professor: Por que vocês disseram que os objetos que estarão no número 324 são lápis e borracha?

Larissa Manuela: Porque o senhor sugeriu que nós relacionássemos o lápis e a borracha com números. E nós numeramos de 1 a 10. No número 3 está o lápis e nos número 2 e 4 a borracha.

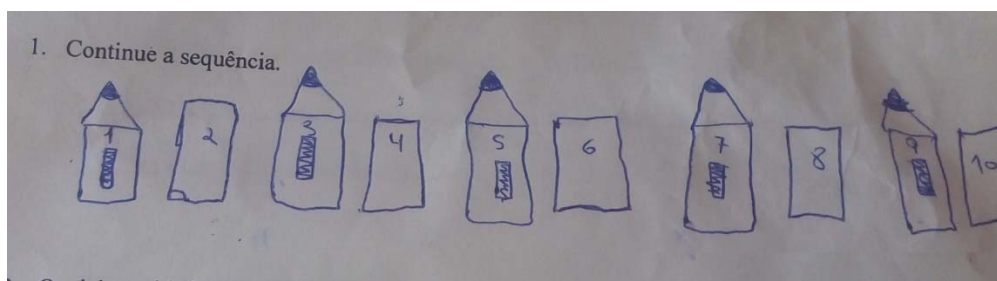


Figura 19. Questão 1 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos usando a representação iconica associada a representação simbólica

Professor: Entendi! Mas esse número não é o número 2, o numero3 e o número 4. Esse número é o número 324. Então qual é o objeto que estará no número 324?

Larissa Manuela: Os objetos?

Professor: Na questão está escrito os ou o?

Larissa Manuela: O

Professor: Esse número 324 é par ou ímpar?

Maria Sofia: E os dois misturados. Porque 3 é ímpar, 2 é par e 4 é par.

Larissa Manuela: Também acho.

Professor: Mas como nós sabemos se um número é par ou ímpar?

Larissa Manuela: Se tiver 2 ímpares e um par é ímpar. Se tiver dois pares e um ímpar é par. Porque o maior vence.

Para identificar se um número era par ou ímpar, as alunas observaram os algarismos que formavam os números. No entendimento delas, essa classificação era dada de acordo com a maior quantidade de algarismos que formava o numeral, ou seja, se o número em questão tivesse a maior quantidade de dígitos par, o número seria par, caso contrário, seria ímpar.

Professor: Mas é assim que identificamos se um número é par ou ímpar?

Larissa Manuela: Não! Agente percebe que 3 não é par. Porque ele só tem 3.

Por exemplo, se fosse 3 dividido por 2, daria 2 para um e 1 para o outro.

Professor: Ah! Entendi. Então quer dizer que um número para ser para tem que ser divisível por 2, não é?

Larissa Manuela: Mais ou menos desse isso. Porque também tem mercearias e mercados que não desse jeito. Se tem R\$ 3,00 para dividir por 2, vai R\$ 1,50 para cada.

Professor: Hum! Muito bem! Mas nesse caso aqui, nós estamos falando de números que não tem vírgula. Entendeu? Então, quando nós identificamos se um número é par?

De início, as alunas chegavam a usar, informalmente, o critério da divisibilidade por dois, ao dar um contra-exemplo ao afirmar que três não era par, pois não era divisível por 2. Dessa forma, supus que as alunas já haviam entendido o conceito em relação a classificação dos números em par ou ímpar e tentei sistematizar o raciocínio delas, porém as alunos usaram um exemplo da realidade, ampliado de forma intuitiva o diálogo para o conjunto dos números racionais. Sendo assim, ainda que de maneira bem sutil, mostrei para elas que estávamos trabalhando em outro conjunto, uma vez que não se faz sentido a classificação de números em par ou ímpar quando os números são decimais:

Maria Sofia: Se tiver 324 é ímpar, se tiver 432 é porque é o da frente que se identifica o número.

Professor: Então vocês podem fazer o seguinte. Escreva uma sequência formada só por números pares.

Ao afirmar que os números da frente, se referindo aos dígitos 3 e 4 que compõem, respectivamente, as centenas dos números 324 e 432, percebi que as alunas continuariam a elaborar respostas por tentativa e erro para conseguir a validação das suas respostas em relação a classificação de um número em par ou ímpar. Dessa forma, propus que elas escrevem duas sequências uma com os números pares e outra com os números ímpares. O meu intuito era que elas percebessem uma regularidade que desse a elas suporte para a superação dessa dificuldade. A estratégia se mostrou exitosa, uma vez que elas conseguiram perceber que os números pares tinham sempre como algarismos das unidades 0, 2, 4, 6 e 8 e os números ímpares os algarismos das unidades, 1, 3, 5, 7 e 9. Sendo assim, elas conseguiram classificar os números 324 em par e 553 em ímpar e identificar os elementos que estavam nessas ordens.

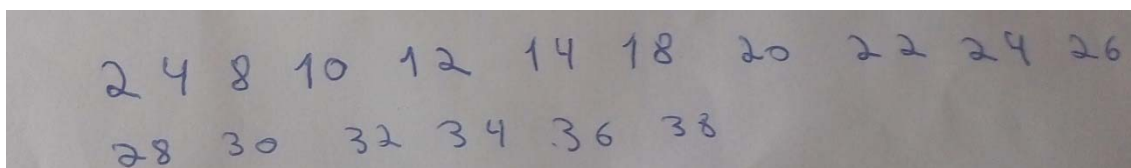


Figura 20. Sequência de números pares do 2 ao 38

Professor: Pronto! Agora você pode escrever uma sequência formada só por números ímpares.

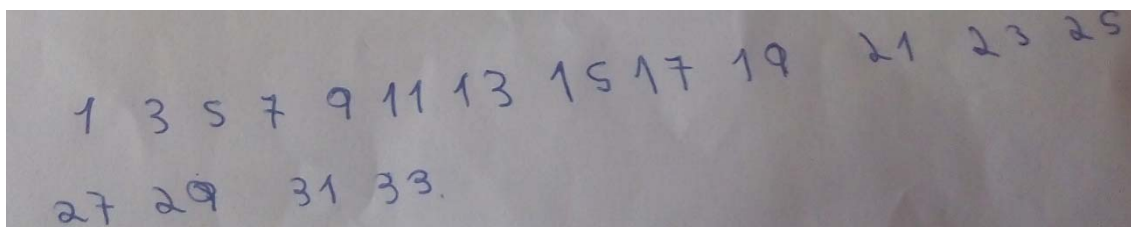


Figura 21. Sequência de números ímpares do 1 ao 33.

Larissa Manuela: Pronto!

Professor: Vocês observam alguma relação com essas sequências formadas por números pares e números ímpares?

Larissa Manuela: Os números pares são 0 2, 4, 6...e os números ímpares são 1, 3 5, 7...

Professor: O que vocês observaram entre essas duas sequências?

Larissa Manuela: Os números pares sempre terminam em 2, 4 .6... e os números ímpares em 1, 3, 5...

Professor: Então escreva isso.

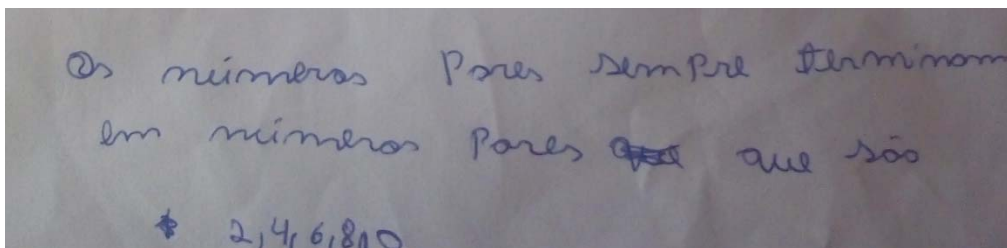


Figura 22. Uso da representação da linguagem natural escrita e da representação simbólica para expressar a compreensão do conceito de números pares

Professor: O número 324 é par ou ímpar?

Larissa Manuela: Par.

Professor: Então, você disse que os objetos pares serão sempre o quê?

Larissa Manuela: Uma borracha.

Professor: Então escreva isso.

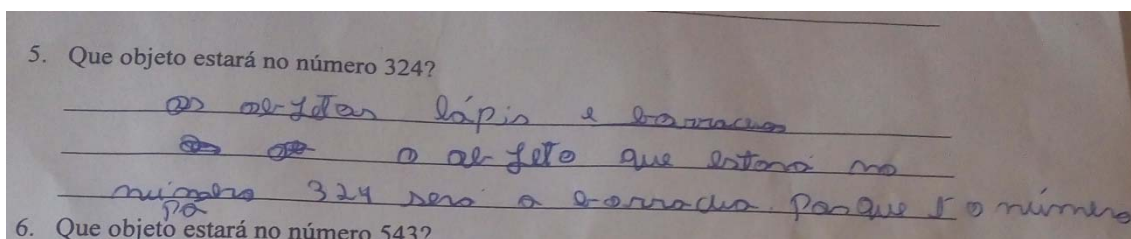


Figura 23. Questão 5 da tarefa 1 com a sua respectiva resposta em linguagem natural escrita e simbólica

Professor: O objeto que está no número 543 será o quê?

Larissa Manuela: Um lápis.

Professor: Por quê?

Larissa Manuela: Porque o lápis é sempre ímpar.

Professor: Então escreva isso.

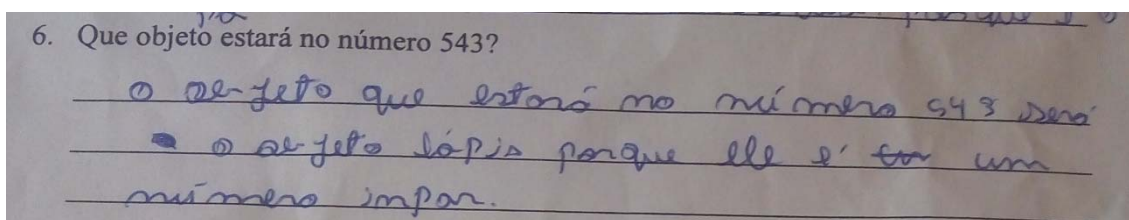


Figura 24. Questão 6 da tarefa 1 com a sua respectiva resposta em linguagem natural escrita e simbólica

Balanço

A tarefa proposta aos alunos tinha a função de diagnóstico com base numa sequência repetitiva. A unidade que se repetia era formada por dois elementos: Um lápis e uma borracha. No decorrer da aula, busquei respostas para as três perguntas: (1) Que estratégias os alunos utilizam para compreender os padrões e regularidades em seqüências lineares; (2) Que representações os alunos utilizam para representar seqüências lineares; e (3) Que dificuldades os alunos expressam para compreender padrões e regularidade em seqüências lineares?

Para tanto, tomei como suporte as sete questões que compunham a tarefa. A primeira solicitava que os alunos continuassem a sequência. Para tanto, eles teriam que compreender que os elementos que se repetiam eram, respectivamente, um lápis e uma borracha. Para responder, os nove grupos desenharam uma sequência formada por um lápis e uma borracha, utilizando dessa forma uma representação icônica.

A segunda questão requeria que os alunos respondessem qual era a unidade que se repetia, para tanto eles deveriam interpretar o termo unidade como sendo os elementos da sequência o que não ocorreu, pois eles interpretaram a palavra unidade como sendo o número que formava o elemento da primeira ordem de uma dada classe. Essa dificuldade ficou evidente por dois motivos: (1) os alunos solicitavam bastante a minha presença nos grupos, no momento que exploram a tarefa, para interagir com eles e tirar as suas dúvidas, porém quando eu explicava que eles poderiam interagir com os seus pares, eles respondiam que o outro não havia entendido; e (2) Eles saltavam da questão 2 para a questão 3.

A questão 3 solicitava que os alunos descrevem uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem, Para isso, eles precisavam compreender que os elementos que estão nos termos de ordem ímpar eram sempre o lápis e que os elementos que estavam nos termos de ordem pares eram sempre borrachas. Os alunos usaram a representação em linguagem natural ao responder que o lápis será ímpar e que a borracha será par. Aqui, eles usam a estratégia de identificação de uma regularidade.

Já a questão 4 solicitava que eles respondessem qual era a unidade que estava no número 132. Para solucioná-la, eles deveriam entender que o padrão que formava a sequência era que os elementos de ordem ímpar eram lápis e que os elementos de ordem par eram borrachas. Entretanto, enquanto uns deixaram sem resposta, outros usaram as representações da linguagem natural e representação simbólica para responder que a unidade que se repetia era o número 2. Ao perceber esse equívoco, resolvi esclarecer para eles que a palavra unidade estava se referindo aos objetos da sequência. Estando isso entendido, eles usaram a linguagem natural para responder que na questão 2, a unidade que se repetia era o lápis e a borracha. Dando continuidade à aula, fomos para questão 4.

A questão 4, tem os mesmos atributos das questões 5 e 6. Na respectiva ordem, os alunos tinham que identificar que os números 132, 324 e 543 eram par, par e ímpar e responder que nos dois primeiros havia uma borracha e que no último havia um lápis. Entretanto, apesar dos alunos conhecerem as sequências dos números pares e ímpares, eles demonstravam dificuldade de enquadrar aqueles números nesses critérios. Na busca da superação dessa dificuldade, interagir com a dupla formada pelas alunas Larissa Manuela e Maria Sofia. Então, resolvi socializar os nossos diálogos com a turma em uma discussão coletiva, em que elas expuseram a conclusão que os números ímpares tinham como Algarismos das unidades os números 1, 3, 5, 7 e 9 enquanto os números pares tinham como Algarismo das unidades os números 0, 2, 4, 6 e 8. Dessa maneira, a turma respondeu que os objetos que estavam nos números 132 e 324 eram borrachas porque eles são pares e que o objeto que estava no número 543 era um lápis porque esse termo tinha ordem ímpar. Usaram assim, a estratégia de identificação de uma regularidade.

Aproveitei o momento da discussão coletiva para socializarmos sobre a questão 7 que solicitava que os alunos escrevessem uma regra para determinar os objetos. De forma verbal, eles esclarecem que os termos de ordem pares serão sempre borrachas e que os termos de ordem ímpar são sempre lápis.

Sendo assim, concluo que na tarefa 1, os alunos usam representações icônicas para representar as seqüências. Para representar os padrões, eles utilizam a linguagem natural e a linguagem simbólica. As dificuldades referem-se ao significado do termo unidade e não reconhecimento de uma regra para determinar os números que são pares e ímpares. Os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade.

Aula 2 – Exploração da sequência repetitiva; Sequência com setas horizontais e verticais

No dia 23 de maio de 2019, realizei a segunda tarefa exploratória. Na aula estavam presentes 18 alunos, 9 meninas e 9 meninos que foram orientados a trabalhar em dupla, totalizando dessa forma 9 grupos. A aula durou aproximadamente 50 min.

Realização da tarefa na aula

A aula dois envolveu a exploração de uma sequência repetitiva em que a unidade que se repetia era uma seta horizontal e outra seta vertical.

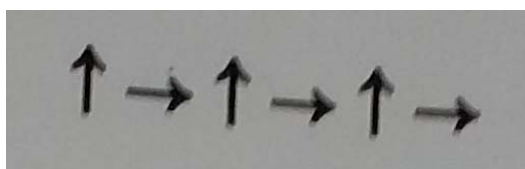


Figura 25. Sequência repetitiva em que a unidade que se repete é uma seta horizontal e outra seta vertical.

Fonte: Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC

Questão 1

Após solicitar que os alunos sentassem em duplas, distribuí as tarefas e esperei um pouco para que eles a explorassem. Passado algum tempo, fui chamado por uma dupla de alunos para saber como proceder na primeira questão que solicitava que eles continuassem a sequência:

Gustavo: Professor é para fazer o que aqui? (apontando o dedo indicador para a primeira questão). Eu não estou entendendo.

Professor: Você já perguntou a Lucas? Vocês estão sentados juntos por isso.
Para conversar sobre o que fazer.

Lucas: Ele já perguntou professor. Mas eu também não sei.

Professor: Vocês já leram a questão? Vocês têm que ler a questão. O que está escrito nela?

Gustavo: Diz que é para continua a sequência. (Leu ele soletrando).

Professor: Então... O que é para fazer?

Gustavo: Não sei ainda.

Nesse momento pude perceber que uma dificuldade sentida pelos alunos era ainda a reduzida familiaridade com a leitura e interpretação de textos, o que se tornou um empecilho para a interpretação e resolução da questão:

Professor: A questão está escrita que é para continuar a sequência. O que vem depois daqui? (Apontei com o dedo indicador para a última seta vertical à esquerda)

Gustavo: Uma seta para cima

Professor: E depois dela?

Lucas: Uma seta deitada

Professor: Como vocês representariam isso?

Gustavo: Desenhado...

Professor: Então façam isso.

A ideia de usar uma representação ativa, ao apontar com o dedo indicador para a seta horizontal e para a seta vertical procedendo assim de forma sucessiva, permitiu que os alunos superassem a dificuldade de interpretar a questão. Quando eles responderam de forma oral, usando a linguagem natural, que a sequência continua com as setas para cima se referindo à seta vertical e com a seta deitada se referindo a seta horizontal, empregaram uma representação icônica, conforme é possível ver na figura.

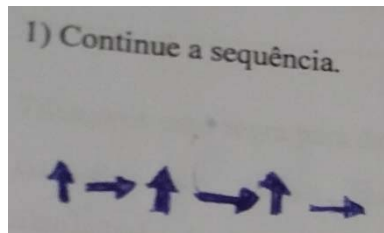


Figura 26. Questão 1 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica

Questão 2

A segunda questão solicitava que os alunos respondessem qual era a unidade que se repetia. Eles não demonstraram dificuldades. Eles mostraram a sua compreensão ao usar as representações em linguagem natural escrita e icônica para responder, como vemos nas figuras seguintes:

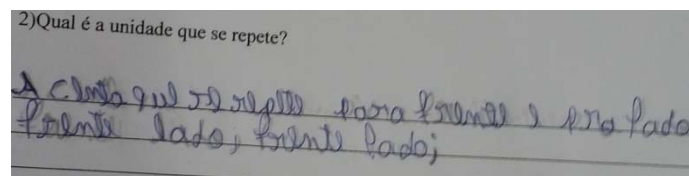


Figura 27. Questão 2 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

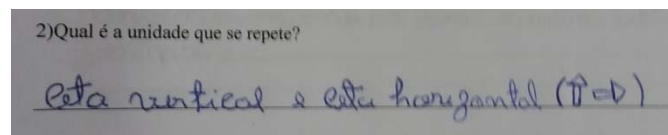


Figura 28. Questão 2 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e icônica

Questão 3

A terceira questão solicitava que os alunos escrevessem uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem. Nessa ocasião, ao circular entre os alunos, percebi que essa questão estava em branco. Por isso, iniciamos o diálogo:

Professor: Por que essa questão está sem responder?

Mariana: Porque eu não entendi.

Ícaro: Eu também não.

Professor: Vocês já leram a questão?

Mariana: Já, mas nós não entendemos.

Professor: Se você tivesse que dar um número para essa seta (apontado o dedo indicador para a primeira seta da sequência) que número seria?

Mariana: O número um. (Levantando o dedo indicador)

Professor: E essa? (apontando o dedo indicador para a segunda seta da sequência).

Ícaro: O número dois. (Levantando dois dedos da mão)

Professor: Como vocês fariam isso?

Mariana: Escrevendo os números.

Professor: Façam isso.

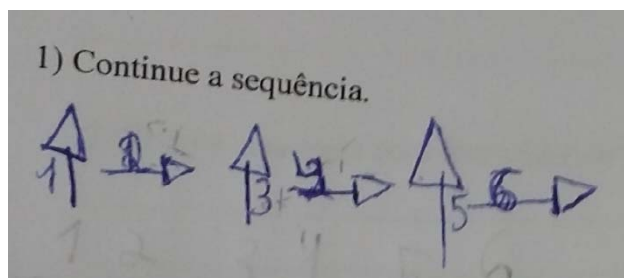


Figura 29. Questão 1 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica

A dificuldade de interpretação sentida pelos alunos foi devida ao fato de que não haviam compreendido que, para fazer uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem, deveriam relacioná-los com os números ordinais. Entretanto, a representação ativa, usada pelo professor, ao apontar com dedo indicador aos elementos da sequência possibilitou aos alunos essa compreensão, pois eles usam a representação simbólica dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5 e 6 para fazer uma correspondência com os termos da sequência. Sanada essa dificuldade, perguntei as duas alunas que estavam no grupo próximo observando a interação:

Professor: Então! Vocês duas observaram alguma relação entre os termos da sequência e entre esses números?

Larissa: Sim

Ana Clara: Sim. Nós observamos que a seta horizontal é sempre ímpar e que a vertical é sempre par.

Professor: Vocês concordam com elas?

Mariana: Sim.

Ícaro: Sim.

Professor: Então escreva isso o que você falou Larissa

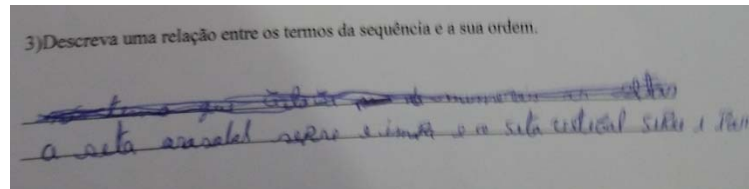


Figura 30. Questão 3 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Ao escrever que a seta vertical é sempre ímpar e que seta horizontal é sempre par, os alunos usam a representação em linguagem natural para demonstrar as suas estratégias de identificação de uma regularidade.

Questão 4

A quarta questão perguntava qual é a unidade que surge no número 132. Para responder, os alunos deveriam compreender que o número 132 é um número par e a unidade que está nessa posição é uma seta vertical. Entretanto os alunos expressaram dificuldades, pois confundiram a palavra unidade com a unidade 2 que o ocupa a primeira ordem da classe simples no numeral 132. Essa dificuldade tornou-se evidente, porque quase todos os alunos responderam que a unidade é o 2, conforme se vê nas figuras:

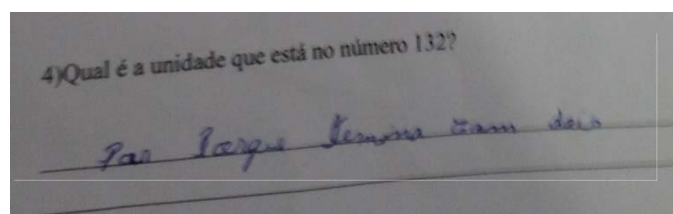


Figura 31. Questão 4 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

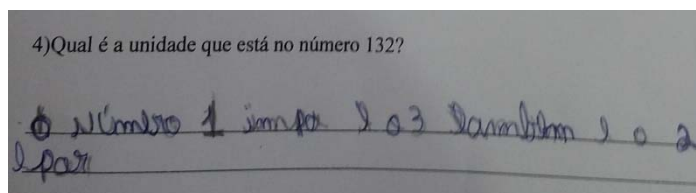


Figura 32. Questão 4 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Observado que esse problema ainda permanecia desde a tarefa 1, resolvi chamar a atenção de todos e esclarecer que a palavra unidade estava se referindo aos termos da sequência, ou seja, a seta vertical ou a seta horizontal e não a classificação de um dígito que compõe um número em unidades, dezenas ou centenas. Nesse momento, fui chamado pela a aluna Késia:

Késia: Professor, já sei.

Professor: Então fale.

Késia: A unidade é o número 2 que é a reta horizontal.

Professor: Por quê?

Késia: Porque 132 é um número par. O número par é horizontal.

Professor: escreva isso que você disse.

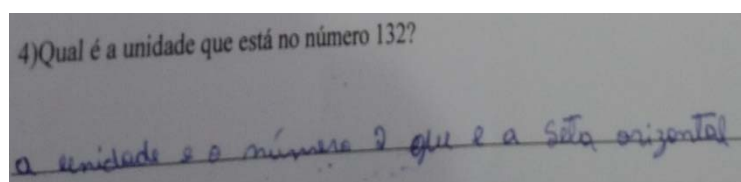


Figura 33. Questão 4 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Ao responder que a unidade que está no número 132 é uma seta horizontal, Késia demonstra que compreendeu a questão.

Questões 5 e 6

As questões 5 e 6 solicitavam que os alunos respondessem que objetos estariam nos números 324 e 543. Para tanto, deveriam perceber que os números 324 e 543 eram

pares e ímpares, respectivamente, e, dessa forma, os objetos seriam uma seta vertical e uma seta horizontal nessa mesma ordem:

Professor: Késia, que objeto estará no número 324?

Késia: Uma seta horizontal.

Professor: Por quê?

Késia: Porque é um numero par.

Professor: Então escreva isso.

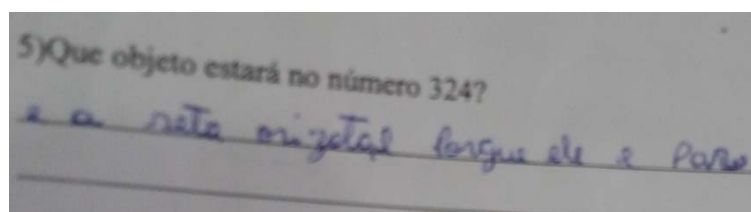


Figura 34. Questão 5 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Professor: Késia, que objeto estará no número 543?

Késia: Uma seta vertical.

Professor: Por quê?

Késia: Porque é um numero ímpar.

Professor: Então escreva isso.

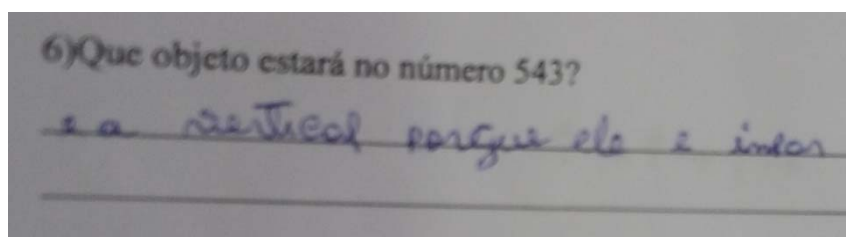


Figura 35. Questão 6 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Questão 7

A sétima questão solicitava que os alunos escrevessem uma regra para determinar os objetos. Os alunos deveriam perceber que as setas verticais eram sempre um termo ímpar e que as setas horizontais eram sempre um termo par.

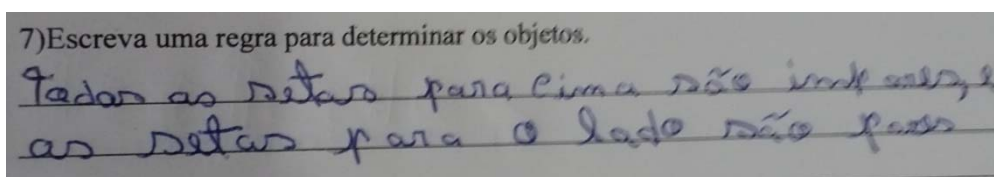


Figura 36. Questão 7 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Balanço

Representações utilizadas pelos alunos para compreender os padrões e regularidades. Nesta aula os alunos usaram três tipos de representações para compreender os padrões e regularidades nas seqüências: (1) Representação ativa; (2) Linguagem Natural; e (3) Representação Icônica. As representações ativas foram usadas quando os alunos empregaram os dedos das mãos para ao fazer uma correspondência com os elementos da seqüência e os números naturais. A linguagem natural foi usada quando os alunos escreveram a seta que se repete para o lado e para frente para nomear a setas horizontais e verticais. A representação icônica apareceu quando os alunos fazem o desenho das setas para continuar representando as sequencias.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar seqüências. Nesta aula, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade. A estratégia de identificação de uma regularidade surgiu nas questões 1 e 3.

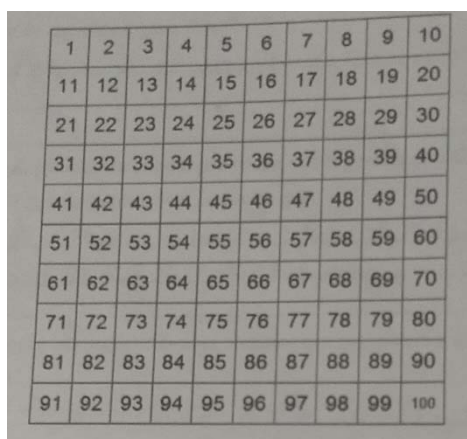
Dificuldades que os alunos expressam para compreender padrões e regularidades. Nessa aula, identifiquei dois tipos de dificuldades sentidas pelos alunos: (1) Dificuldade de interpretação; e (2) Dificuldade em ordenar. As dificuldades de interpretação ficaram evidentes quando os alunos precisavam soletrar para ler as palavras. As dificuldades em ordenar transpareceram quando os alunos demonstraram não entender que ordenar os termos é fazer uma correspondência com os números ordinais.

Aula 3–Exploração da seqüência crescente: seqüência finita de números

Realização da tarefa na aula

No dia 24 de maio de 2019, desenvolvi a terceira tarefa. Na aula estavam presentes 18 alunos, 9 meninas e 9 meninos. Eles foram orientados a trabalhar em dupla, totalizando dessa forma 9 grupos. A aula durou 1h e 20 min.

A aula envolveu a exploração de uma tarefa que contém um quadro com números:



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 37. Quadro numérico

Fonte: Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC

Para iniciar a aula, solicitei que os alunos sentassem em dupla e logo após, entreguei a tarefa. Passados alguns minutos, comecei a interagir com a turma:

Professor: O que vocês têm aí nas mãos?

Turma: Uma tarefa.

Professor: O que envolve essa tarefa?

Turma: Sequências.

Professor: Muito bem! Explore a tarefa. Explorar a tarefa significa que vocês devem discutir e tentar resolvê-la.

Questão 1

Dadas as orientações, decorridos alguns minutos, fui chamado por uma dupla de alunos:

Ronaldinho Gaúcho: Professor, o que é para fazer aqui? (apontando com o dedo para a primeira questão). Eu não estou entendendo.

Professor: Você já perguntou para ele? (apontei com o dedo indicador para o seu par).

Neimar Batista: (movimentando os ombros rapidamente para cima e para baixo) Eu também não sei.

Professor: Você já leu a questão? Leia que eu quero ver.

Ronaldinho Gaúcho: Es-co-lha uma li-nha do qua-dro. Es-cre-va a se-quên-cia de nú-me-ros que vo-cê es-co-lheu. (Leu soletrando as palavras).

Ao ser chamado pelos alunos, percebi duas dificuldades. A falta de costume em trabalhar aos pares, pois enquanto um segurava a tarefa só para si, o outro parecia ainda não ter tomado conhecimento do teor da mesma. Isso implica dizer que a comunicação entre os alunos ainda estar por desejar. A segunda dificuldade diz respeito à interpretação da tarefa, pois para que haja uma boa compreensão é necessário que os alunos façam uma boa leitura. Mas os alunos demonstram pouca compreensão em virtude da leitura, como pode ser visto a seguir.

Ronaldinho Gaúcho: Professor: Linha á assim ou assim? (Ele fazia movimentos, no ar, com a caneta para representar linhas horizontais e verticais.)

Professor: Como são as linhas do seu caderno? Assim ou assim? (Repeti os movimentos deles, para representar as linhas com movimentos horizontais e as colunas com movimentos verticais).

Ronaldinho Gaúcho: Assim (Ele fez um movimento horizontal).

Professor: Muito bem! É isso mesmo. Qual linha vocês vão escolher?

Ronaldinho Gaúcho: A linha do seis.

Essa primeira questão solicitava que os alunos escolhessem uma linha do quadro e a transcrevessem. Para tanto, era esperado que soubessem identificar o que é linha, porém isso não ocorreu, pois os alunos mostram não entender a questão. Porém a interação com o professor, ao visar encorajá-los, possibilitou-lhes usar representações ativas, ao fazer movimentos, horizontais, no ar com a caneta para representar as linhas do caderno. Sanada essa dificuldade, os alunos usaram a linguagem oral, ao afirmar que escolheram a casa do seis se referindo à sequência formada pelos números 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69 e 70, pois nela prevalece o algarismo 6 nas dezenas, com exceção apenas do número 70, e usam a representação simbólica para a escrever, valendo-se dessa forma da estratégia de identificação de uma regularidade, como vemos na figura:

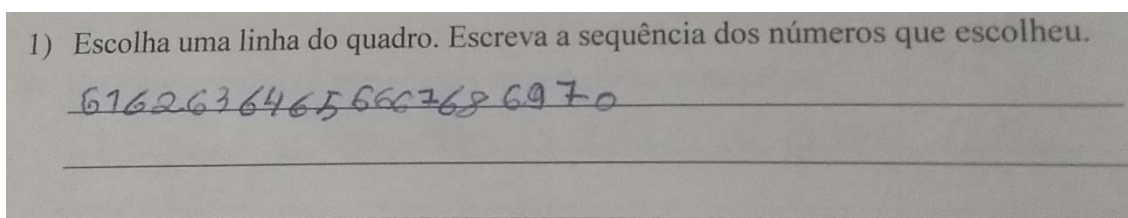


Figura 38. Questão 1 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica

Antes mesmo de terminar o diálogo com os alunos do grupo acima, fui chamado pela dupla formada pelas alunas Ana Maria e Larissa Manuela.

Questão 3

Ana Maria: Professor, de cima para baixo é de 10 para 100, ou de 1 para 91?

Professor: Larissa Manuela, o que você acha da pergunta dela?

Larissa Manuela: É porque nós escolhemos a coluna do nove. Queremos saber se é assim mesmo ou se é dessa daqui? (Ela apontou para a coluna do 1)

Ana Maria: É porque nós escolhemos a linha do nove. Nós não sabemos se é daqui para cá (Fez apontando com o dedo indicador no sentido norte sul, ou seja, de cima para baixo) ou se é assim (Ela fez apontando com dedo indicador no sentido oeste leste, ou seja, da esquerda para a direita)

Professor: Mas a questão está se referindo a linha ou a coluna?

Larissa Manuela: Da coluna.

Ana Maria: Da coluna.

Professor: Então...

Larissa Manuela: Mas nós que saber se é dessa ou é dessa (Apontou para a coluna do 1 para a coluna do 9).

Professor: Da coluna que vocês escolheram.

Ana Maria: Ah! Então é do 10.

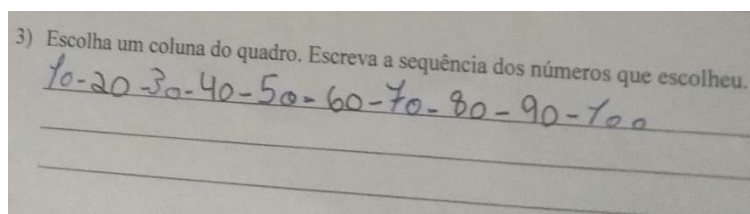


Figura 39. Questão 3 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica

A terceira questão solicitava que os alunos escolham uma coluna do quadro e represente os números escolhidos nela. Entretanto, um fator de dificuldade para a interpretação da questão foi o não entendimento do que é coluna. As alunas mostram-se confusas entre o que são colunas e linhas. Esse fato se mostrou evidente quando as alunas faziam movimentos horizontais no sentido oeste/leste, isto é, da esquerda para a direita e movimentos verticais no sentido norte/sul, isto é de cima para baixo. Entretanto, a interação entre as alunas e professor possibilitou que elas superassem essa dificuldade ao usarem linguagem oral para esclarecer que seria a coluna do dez, se referindo a primeira dezena da sequência, o uso da representação externa ativa ao apontar com o dedo indicador do sentido norte para o oeste e a linguagem simbólica para escrever a sequência. Aqui os alunos usam a estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 2

Ao término do diálogo, fui chamado pela dupla formada pelas alunas Isadora e Cristiano Ronaldo:

Isadora: Eu não entendi esse negócio da questão. Quanto aumenta cada número da esquerda para a direita. Porque o número 1 que começa está para esquerda e número dez que termina está para a direita. (falou apontando com a caneta)

Professor: Mas a questão está perguntado do primeiro ao último ou de cada número?

Isadora: De cada número.

Professor: Quanto aumenta desse número para esse ? (Apontei com o dedo indicador do número 1 para o número 2).

Isadora: Um.

Professor: E desse para esse? (Apontei do número 2 para o número 3).

Isadora: Um.

Professor: E desse para esse? (Apontei para o número 3 para o número 4).

Isadora: Um.

Professor: E desse para esse? (Aponte para o número 4 para o número 5).

Isadora: Um.

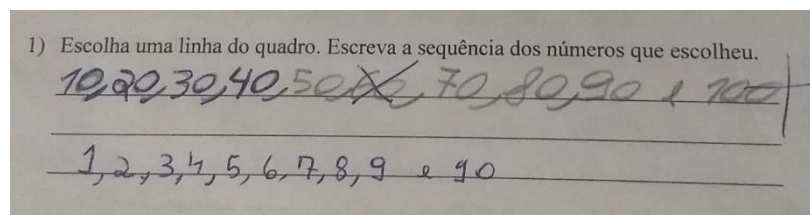


Figura 40. Questão 1 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica

Esta questão solicitava que os alunos escolhessem uma linha do quadro e escrevessem os termos dessa sequência. Porém, percebi uma primeira dificuldade de interpretação da dupla. Notei que num primeiro momento, eles escreveram a sequência de uma coluna e não de uma linha como pedido no quesito. Acredito que a dupla percebeu o equívoco por dois motivos. Primeiro, eles escreveram outra sequência depois. Segundo, no momento em que foram tirar as suas dúvidas, eles se referiram à sequência de baixo:

Professor: Por quê?

Isadora: Porque do 5 pula só mais um dedinho e vai para o 6. (Ela mostrou os dedos das mãos).

Professor: Então escreva.

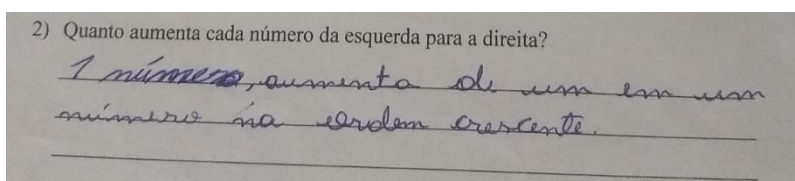


Figura 41. Questão 2 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica e natural escrita

A segunda questão solicitava que os alunos respondam quanto aumenta cada número da esquerda para direita. Porém, os alunos mostram dificuldade na interpretação do texto ao dizerem que não haviam entendido a questão, porque o primeiro termo da sequência era o número 1 e o último era o 10. Mas, com a ajuda do professor, essa

dificuldade foi superada. Os alunos demonstram ao usar a linguagem natural para escrever que o número aumenta de um em um em ordem crescente para referirem que a razão entre os termos consecutivos é um número positivo. Aqui os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade, conforme mostra a figura acima.

Questão 4

Dando continuidade à aula, mais uma vez fui chamado pela dupla formada pelos alunos Ronaldinho Gaúcho e Neimar Batista:

Ronaldinho Gaúcho: Professor, nós não entendemos isso aqui. (Apontando com o dedo indicador para a questão 4).

Professor: O que vocês não entenderam?

Ronaldinho Gaúcho: A questão 4. Quan-to au-men-ta ca-da nú-me-ro de ci-ma pa-ra bai-xo? (Ele leu soletrando as palavras da frase).

Professor: De cima para baixo é linha ou coluna?

Ronaldinho Gaúcho: Coluna.

Professor: Como é a coluna?

Ronaldinho Gaúcho: Assim... (Ele fez um movimento vertical com a mão de cima para baixo).

Professor: Qual foi a coluna que vocês escolheram?

Ronaldinho Gaúcho: Essa aqui. A do dois. (Ele disse apontando para a segunda coluna da esquerda para direita, cujo número dois é o primeiro termo).

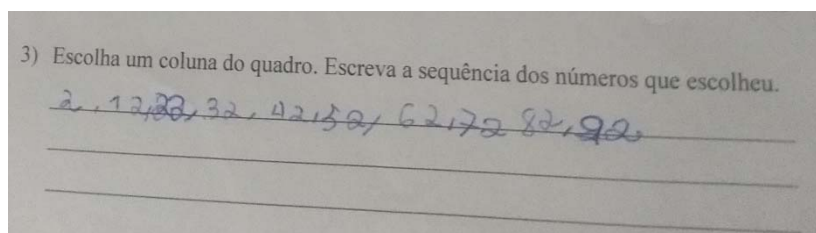


Figura 42. Questão 3 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica

Mais uma vez, o aluno demonstra dificuldades em relação ao entendimento da questão em virtude de uma má interpretação. Porém, com a ajuda do professor, o aluno consegue avançar na resolução.

Professor: Daqui para cá aumenta quanto? Desse número para esse? (Aponte do número dois para o número 12)

Ronaldinho Gaúcho: Dois.

Professor: E desse para esse? (Aponte do número 12 para o número 22.)

Ronaldinho Gaúcho: Dois.

Professor: E desse para esse? (Aponte do número 22 para o número 32.)

Ronaldinho Gaúcho: Dois.

Professor: Por quê?

Ronaldinho Gaúcho: Porque é a coluna do dois.

Professor: Mas observe. Que número é esse? (Aponte do número 2.)

Ronaldinho Gaúcho: Dois.

Professor: De 2 para 12 aumenta quanto?

Ronaldinho Gaúcho: Não sei.

Professor: não sabe? Você tem 2. Para chegar em 12, quanto é que aumenta?

Ronaldinho Gaúcho: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (Contou usando os dedos das mãos do três até o 12). Aumenta 10.

Professor: E do 12 para o 22?

Ronaldinho Gaúcho: Aumenta 20.

Neimar Batista: não. Aumenta 12.

Professor: Por quê?

Neimar Batista: Aumenta 10 (após contar nos dedos)

Professor: e do 22 para o 32?

Neimar Batista: Aumenta 10. Porque nesses números sempre vão aumentar 10.

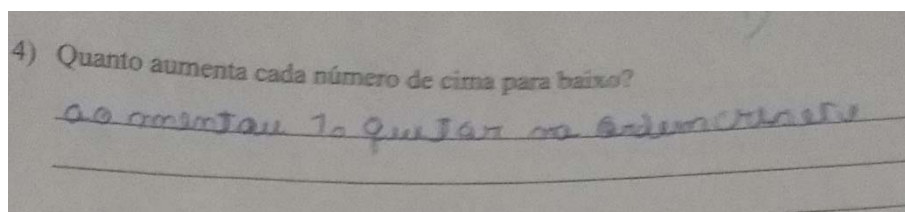


Figura 43. Questão 4 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Os alunos parecem ainda não ter autonomia para responder à questão. Sentem dificuldade em perceber que o modo de formar os termos da seqüência 2, 12, 22, 32, 42,

52, 62, 72, 82, e 92 é adicionar o número 10. Eles nomeiam essa sequência de sequência do dois, pois além dessa começar com o número dois, todos os números têm o número 2 nas suas unidades. Usaram assim a estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 5

A questão 5 solicitava que os alunos escolhessem uma diagonal do quadro, escrevessem a sequência de números e respondessem quanto aumentava de um número para o outro. Porém uma equipe não conseguiu respondê-la e por esse motivo solicitou a minha ajuda.

Ronaldinho Gaúcho: Professor, não estou conseguindo fazer.

Professor: O que está escrito aí?

Neimar Batista: Escolha uma diagonal.

Ronaldinho Gaúcho: O que diagonal?

Professor: Pergunte a ele lá. (Apontei o dedo indicador para Neimar Batista)

Ronaldinho Gaúcho: O que é diagonal, Neimar?

Neimar Batista: Não sei.

Ronaldinho Gaúcho: Ele não sabe.

Professor: Atenção, turma! Alguém pode dizer o que é diagonal?

Philippe: A linha quando está assim. (Fez com o braço uma inclinação de aproximadamente 45°).

Professor: Muito bem! É uma linha inclinada. Como vocês a representaria?

Os alunos Ronaldinho Gaúcho e Neimar Batista demonstram dificuldades em interpretar a questão por desconher o significado da palavra diagonal, como mostrado no diálogo acima.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 44. Quadro numérico com a sua diagonal principal sinalizada com um traço feito com caceta de cor azul

Como Philipe havia feito uma representação ativa para esclarecer o que era diagonal, resolvi ir até o seu grupo e pude notar que eles já havia resolvido a questão 5. Eles demonstram compreendê-la ao usar a linguagem simbólica (“1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 e 100”), para representar a sequência.

Professor: Como vocês pensaram para responder essa questão?

Philipe: Olhando os números da diagonal.

Professor: Quanta aumenta cada número?

Philipe: Onze.

Professor: Por quê?

Philipe: Porque nós contamos e de um para o outro aumenta onze.

Os alunos demonstram entender que a regularidade formadora da sequência é adicionar a razão 11 aos termos e assim encontrar os respectivos sucessores. Usaram a linguagem natural para registrar estratégia de identificação de uma regularidade, como podemos ver na figura seguinte:

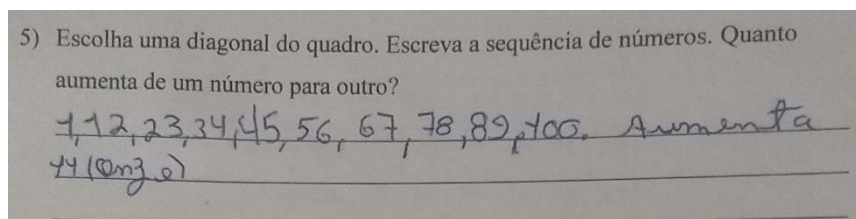


Figura 45. Questão 5 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Questão 6

A sexta questão solicita que os alunos respondam se perceberam alguma regularidade nas três sequências escolhidas. Neste caso, desejava-se que além de perceberem que as sequências são crescentes, eles expressassem a suas regularidades exibindo as razões que as formam. Apesar dos alunos não exibirem as razões que formam as sequências, eles usaram a linguagem natural e mostraram a sua compreensão da estratégia de identificação de uma regularidade em sequências crescentes:

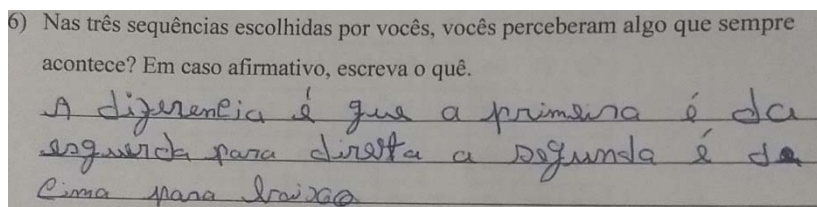


Figura 46. Questão 6 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Professor: Philipe, a questão pede para que vocês escrevam se existe alguma semelhança nas sequências que você fez.

Philipe: Eu sei.

Professor: Mas o que escreveu foi a semelhança ou a diferença?

Philipe: Eu ia escrever, mas não deu espaço.

Professor: Então escreva mais para baixo.

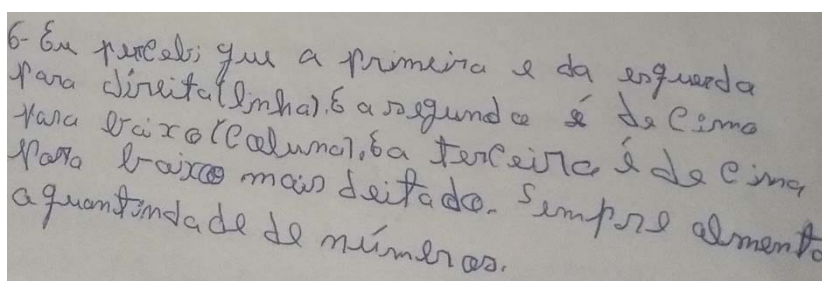


Figura 47. Resposta da questão 6 com uma representação em linguagem natural escrita

Os alunos demonstraram compreender que as sequências eram crescentes ao usarem a linguagem natural para diferenciá-las quanto às suas direções; verticais, horizontais e inclinadas e assim referir as colunas, linhas e diagonais, respectivamente. Porém, eles não deixaram de indicar que todas as sequências eram crescentes ao afirmarem que as quantidades de números aumentavam usando assim a estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 7

A sétima questão requeria que os alunos continuassem as três sequências com números que pertencem a elas, mas não estavam no quadro de números. Para responder, todos usaram a linguagem simbólica, conforme se vê na dupla formada por Alice e Aline que respondeu corretamente a essa questão.

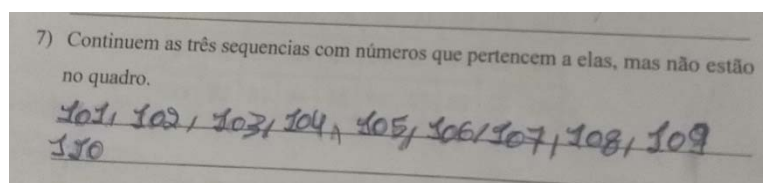


Figura 48. Questão 7 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica

Questão 8

A oitava questão solicitava que os alunos explicassem como pensaram para reproduzir as sequências. Os alunos usaram as linguagens simbólica, numérica e natural escrita, para responder às questões:

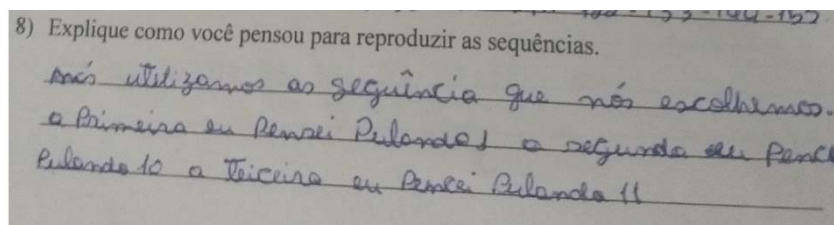


Figura 49. Questão 8 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural

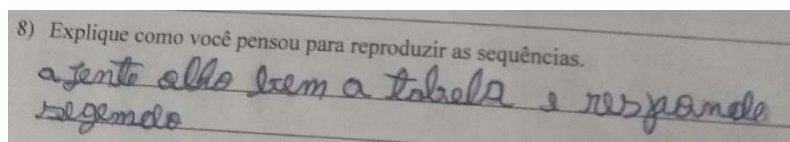


Figura 50. Questão 8 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural

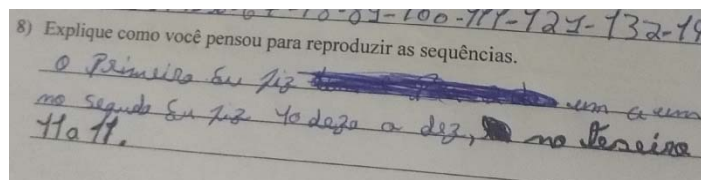


Figura 51. Questão 8 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural e simbólica

Balanço

Representações utilizadas pelos alunos para compreender padrões e regularidades. Nesta aula, os alunos usaram quatro tipos de representações para compreender os padrões e as regularidades nas seqüências: (1) Representações ativas; (2) Linguagem oral; (3) Linguagem natural escrita; e (4) Linguagem simbólica. As representações ativas surgiram nas questões 1 e 3 quando os alunos Ronaldinho Gaúcho, Neimar Batista e Philipe, fizeram movimentos com o corpo para expressar a compreensão dos seus raciocínios. A linguagem oral surgiu na questão 3 quando a aluna Ana Maria disse que era a coluna do 10, para se referir a última seqüência do quadro. Já a linguagem natural escrita surgiu nas questões 2, 4, 5 e 6, pois os alunos usaram a língua materna para externalizar as compreensões. A linguagem simbólica ficou evidente nas questões 1, 3, 5 e 7 uma vez que os alunos usaram os símbolos numéricos para dessa forma demonstrar as suas compreensões das questões.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar seqüências. Nesta aula, os alunos usaram a estratégia de representação de uma regularidade. Essa surgiu nas questões 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Dificuldades que os alunos expressam para compreender padrões e regularidade. Nessa aula, identifiquei 2 tipos de dificuldades: (1) Dificuldade de interpretação; e (2) Dificuldade de comunicação. A dificuldade de interpretação aparece nas questões 1, 2 e 3. Na questão 1, essa dificuldade é fruto de que os alunos ainda não

se mostrarem letrados, ou seja, conseguiram formar as palavras, mas conseguiram decodificar o texto. A questão 2 transpareceu a dificuldade de não identificar que os termos da esquerda para direita significa termos sucessivos. Essa dificuldade surgiu na questão 3, pois o aluno não sabia identificar uma coluna. A dificuldade de comunicação apareceu na questão 1, pois os alunos demonstraram reduzido hábito de trabalhar em pares, uma vez que enquanto um segurou a tarefa como se estivesse trabalhando individualmente, o outro pareceu que não havia nem tomado conhecimento do seu conteúdo. Além disso, os alunos sempre deram preferência em chamar o professor do que debaterem entre si.

Aula 4 – Exploração da sequência crescente: sequência com números pares e ímpares

No dia 27 de maio de 2019, realizei a quarta tarefa exploratória, com todos os alunos estavam presentes. 12 meninas e 9 meninos, que foram orientados a trabalhar em dupla, totalizando dessa forma 9 grupos. A aula durou aproximadamente 1h e 15 min.

Realização da tarefa na aula

A quarta aula envolveu a exploração de duas sequências crescentes. A primeira era formada por figuras com bolas de futebol que representavam números ímpares e a segunda era formada por figuras com bolas que representavam números pares:

Números ímpares

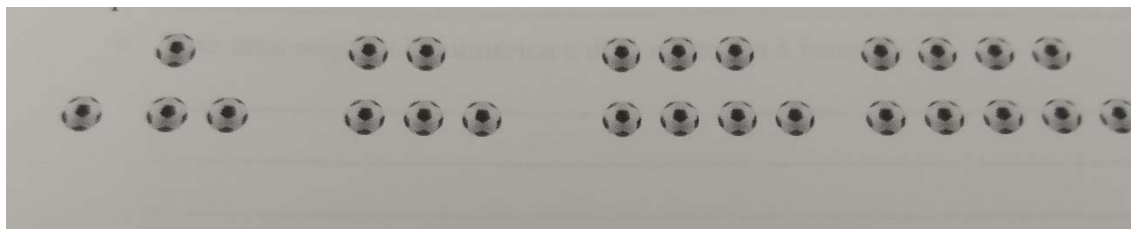


Figura 52. Bolas de futebol agrupadas em conjuntos com 1, 3 5. 7 e 9 unidades, respectivamente. para representar asequênciadados números ímpares

Números pares

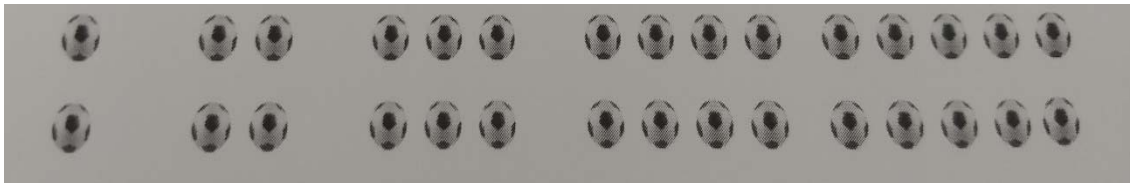


Figura 53. Bolas de futebol agrupadas em conjuntos com 2, 4, 6, 8, 10 e 12 unidades, respectivamente. para representar a sequência dos números pares

Questão 1

A primeira questão solicitava que os alunos continuassem representando a sequência de acordo com o modelo da figura. Para representá-la, os alunos teriam que compreender que a primeira sequência era formada por figuras que representam números ímpares e a segunda era formada por figuras que representam números pares. A maior parte dos grupos apenas reproduziu os desenhos das sequências do seu primeiro ao seu quinto termo e usou a representação icônica como mostra a figura:

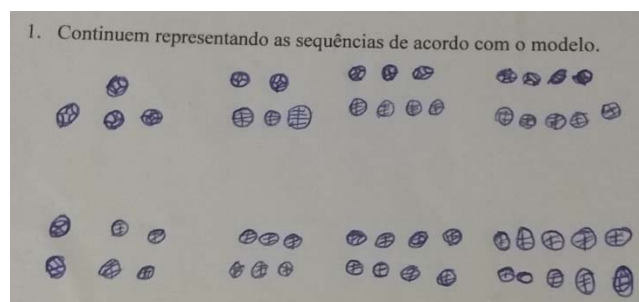


Figura 54. Questão 1 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica

Porém, um grupo entendeu que a questão ia além de copiar as sequências. Na sequência dos números ímpares, os alunos usaram a representação icônica associada com a representação simbólica para relacionar o 7.º termo à quantidade 13 bolas, o 8.º termo à quantidade 15 bolas, o 9.º termo à quantidade 19 bolas. Já na sequência dos números pares, os alunos começam a partir do 7.º termo chamando-o de 1. Eles usaram a representação ativa, ao apontarem com o dedo indicador os termos da sequência, associada à representação simbólica, para relacionar o termo 1 com a quantidade 12 bolas, o termo 2 com a quantidade 14 bolas, o termo 3 com a quantidade 16 bolas e o termo 4 com a quantidade de 18 bolas.

Os alunos usaram a representação dos números cardinais ao invés dos ordinais para ordenar os termos da sequência, pois já haviam demonstrado anteriormente dificuldade em trabalhar com esses números:

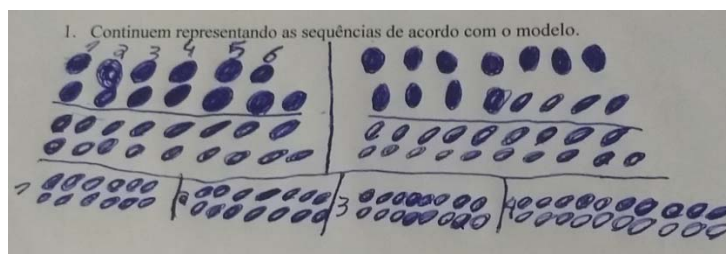


Figura 55. Questão 1 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica e simbólica

Ao escreverem que na sequência (se referindo aos números ímpares), o número 1 o número 2, o número 3 o número 4 e o número 5, o grupo usou a linguagem natural, associada a representação icônica para continuar a sequência representando as respectivas, quantidades 11, 13, 15, 17, 19...usando assim a estratégia da contagem. Porém mais uma vez os alunos mostram dificuldades com relação ao uso dos números ordinais.

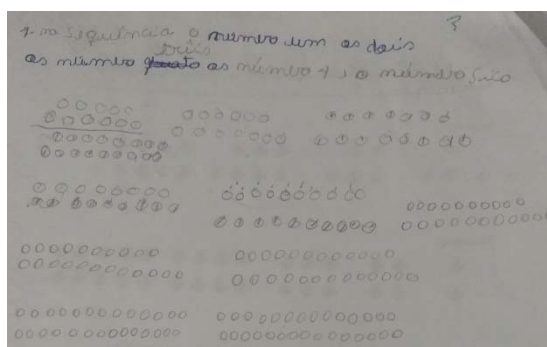


Figura 56. Resposta da questão 1 da tarefa 4 com uma representação icônica e simbólica

Questão 2

A segunda questão solicitava que os alunos descrevam os termos da sequência de acordo com a sua ordem. Para tanto, eles deveriam perceber que na primeira só havia quantidades de bolas representadas por números ímpares e que na segunda só havia quantidade de bolas representada por números pares, porém os alunos demonstram dificuldades de interpretar a questão. Na sua resposta, usaram a linguagem natural para indicar a estratégia de identificação de uma regularidade.

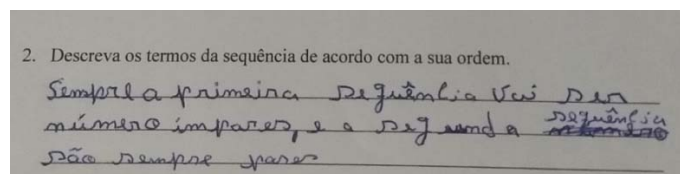


Figura 57. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

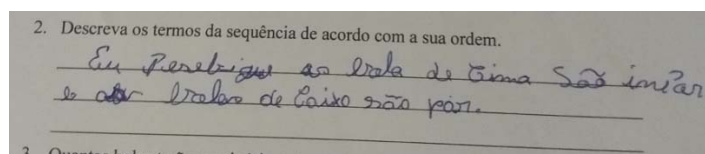


Figura 58. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

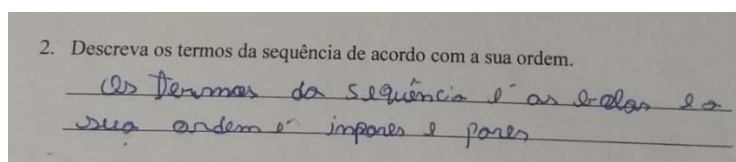


Figura 59. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

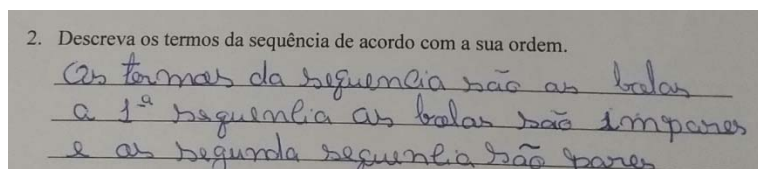


Figura 60. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Questão 3

A questão 3 solicitava que os alunos respondam quantas bolas terão no 20.º termo da primeira sequência. Um possível raciocínio para responder era fazer uma correspondência biunívoca entre os termos da sequência e a quantidade de bolas estabelecendo assim uma função em que a quantidade de bolas depende da posição do termo, ou seja, a posição do termo é a variável independente e quantidade de bolas a variável dependente. É preciso ter em atenção que para cada termo existe uma quantidade de bolas e essa quantidade é única, isto é, a quantidade de bolas é função da posição do termo como é ilustrado na tabela:

Sequência 1

Termo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Quantidade de bolas	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Figura 61. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 1 e a quantidade de bolas

Termo	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
Quantidade de bolas	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39

Figura 62. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 1 e a quantidade de bolas

Outra proposta com o nível cognitivo mais elevado poderia ser que os alunos associassem a quantidade de bolas da primeira sequência à posição do termo da seguinte forma: *para encontrar a quantidade de bolas em cada termo da sequência basta dobrá-lo ao resultado subtrair uma unidade*, resumidamente, poderia encontrar a seguinte lei, $q(n) = 2n - 1$. Dessa forma, para determinar a quantidade de bolas no 20º termo bastaria fazer 20×2 e subtrair uma unidade e encontrar 39 bolas como resposta.

Porém ao circular pela sala, observei que a maior parte da turma havia deixado a questão sem responder, e que alguns alunos davam respostas aleatórias. Mas o que me chamou atenção foi o fato de dois grupos darem a mesma resposta: terão 25 bolas. Dessa forma, sentei com uma dupla para interagir com os alunos procurando entender qual era a lógica por detrás daquela resposta:

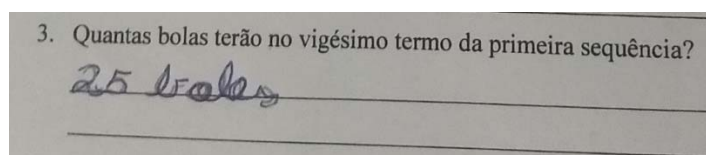


Figura 63. Questão 3 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Professor: El Gato, por que você concluiu que na questão três tem 25 bolas?

El Gato: Porque eu contei.

Professor: Ham!? Você foi contando?

El Gato: Foi.

Professor: Então mostre aí.

El Gato: Uma, duas, três, quatro, cinco, seis... vinte e cinco (aluno aponta com o dedo polegar para cada bola da primeira sequência e as associam a um número cardinal contabilizando dessa forma 25 bolas), porque está parecendo 25.

Apesar de no início não, ter entendido o porquê da resposta 25, ao ser questionado, o aluno mostra a lógica para a sua resposta. Ao apontar com o dedo polegar direito, ele faz uma relação do número de bolas com os números cardinais de 1 à 25, soma as quantidade de bolas do 1.º, 2.º, 3.º, 4.º, 5.º e 6.º termos que são, respectivamente, 1, 3, 5, 7 e 9, cuja a soma resulta em 25. Dessa forma, ele deduziu que essas bolas fazem parte de um único conjunto que cuja cardinalidade é 25. Usou assim a estratégia de contagem.

Questão 4

A questão 4 solicitava que os alunos respondessem quantas bolas terão no 30.º termo da segunda sequência. Um possível raciocínio para responder era fazer uma correspondência biunívoca entre os termos da sequência e a quantidade de bolas, estabelecendo assim uma função em que a quantidade de bolas depende da posição do termo. Ou seja, tendo atenção que a posição do termo é a variável independente e quantidade de bolas a variável dependente e que para cada termo existe uma quantidade de bolas e essa quantidade é única, isto é, a quantidade de bolas é função da posição do termo como, por exemplo, é ilustrado na tabela.

Sequência 2

Termo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Quantidade de bolas	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Figura 64. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 2 e a quantidade de bolas

Termo	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
Quantidade de	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40

bolas										
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 65. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 2 e a quantidade de bolas

Termo	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
Quantidade de bolas	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60

Figura 66. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 2 e a quantidade de bolas

Para a sequência dos números pares, os alunos poderiam fazer a seguinte relação: *a quantidade de bolas é o dobro da posição do termo*, resumidamente, $q(n) = 2n$. Dessa forma, para determinar a quantidade de bolas no 30.º termo bastaria fazer 30×2 e encontrar 60 bolas como resposta:

Professor: E por que você disse, na questão 4 que tem 30 bolas?

El Gato: Pelo mesmo motivo. Eu contei.

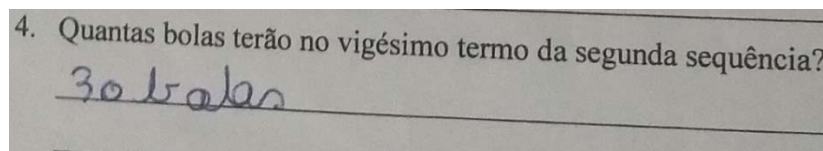


Figura 67. Questão 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Nesse momento, percebi que o aluno usou a mesma estratégia da contagem. Então, visando sanar essa dificuldade, iniciamos o diálogo:

Professor: Mas observe (aponte com dedo indicador direito para o primeiro termo da primeira sequência) aqui tem quantas bolas?

El Gato: Uma.

Professor: Aqui tem? (aponte com dedo indicador direito para o segundo termo da primeira sequência).

El Gato: Três.

Professor: Aqui tem? (aponte com dedo indicador direito para o terceiro

termo da primeira sequência).

El Gato: Cinco.

Professor: Aqui tem? (aponte com dedo indicador direito para o quarto termo da primeira sequência).

El Gato: Sete.

Professor: Aqui tem? (aponte com dedo indicador direito para o quinto termo da primeira sequência).

El Gato: Oito, aliás, nove.

Professor: O próximo será?

El Gato: Dez.

Professor: Por quê?

El Gato: Eu não entendi isso direito, professor.

Os alunos demonstram dificuldades em resolver a questão. Suspeitando que esse problema fosse fruto de uma má interpretação em virtude do conhecimento dos alunos dos números pares e ímpares e dos números ordinais, resolvi intercalar as duas sequências:

Professor: Aqui tem quantas bolas? (aponte para o 1.º termo da sequência 1).

El Gato: uma.

Professor: Aqui tem quantas bolas? (aponte para o 1.º termo da sequência 2).

El Gato: Duas.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 2.º termo da sequência 1).

El Gato: Três.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 2.º termo da sequência 2).

El Gato: Quatro

Professor: Aqui tem? (aponte para o 3.º termo da sequência 1).

El Gato: Cinco.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 3º termo da sequência 2).

El Gato: Seis.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 4.º termo da sequência 1).

El Gato: Cinco.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 4.º termo da sequência 2).

El Gato: Oito.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 5.º termo da 1.ª sequência).

El Gato: Nove.

Professor: Aqui tem? (aponte para o 5.º termo da sequência 2).

El Gato: Dez.

Professor: Agora qual será o próximo nessa sequência? (aponte para a sequência 1).

El Gato: O onze.

Professor: Por quê?

El Gato: Porque depois do dez vem o onze.

Professor: E nessa aqui?(aponte para a sequência 2).

El Gato: O doze.

Professor: Por quê?

El Gato: Porque depois do onze vem o doze.

Professor: E nessa aqui?(aponte para a sequência 1).

El Gato: O treze.

El Gato: Porque depois do doze vem o treze.

Professor: E nessa aqui?(aponte para a sequência 2).

El Gato: O quatorze.

Professor: Por quê?

El Gato: Porque depois do treze vem o quatorze.

Após intercalar as duas sequências, os alunos conseguiram escrever os seus próximos termos. Dessa forma, confirmei a minha suspeita que a sua dificuldade vinha de não conhecerem a sequência dos números ímpares e dos números pares.

Questão 5

A quinta questão solicitava que os alunos esclarecessem como chegaram à conclusão do resultado da quarta questão. Para responder, os alunos desenvolveram um raciocínio similar a do grupo de El Gato. Isto é, somaram as quantidades de bolas usando a estratégia da contagem:

Grupo 1

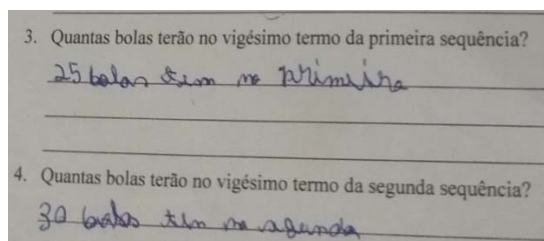


Figura 68. Questões 3 e 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

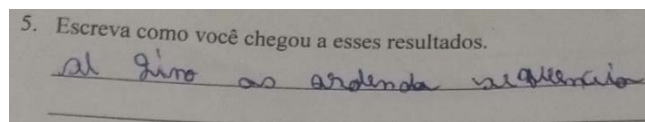


Figura 69. Questão 5 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Grupo 2

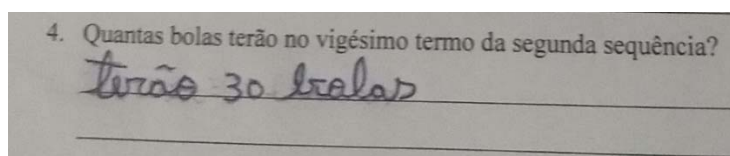


Figura 70. Questão 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

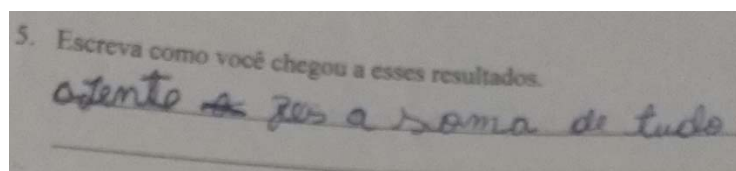


Figura 71. Questão 5 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Grupo 3

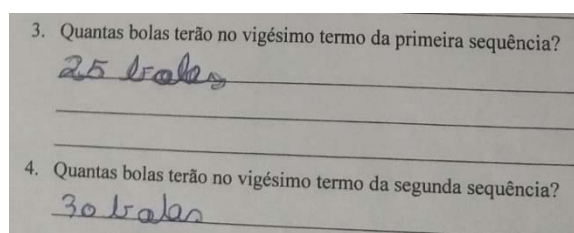


Figura 72. Questões 3 e 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

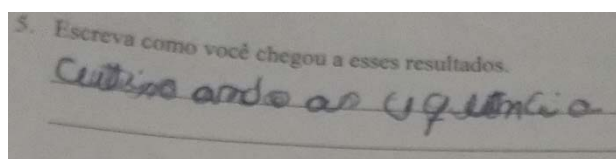


Figura 73. Questão 5 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Questão 6

A sexta questão solicitava que os alunos criassem uma sequência numérica. Para responder, eles usaram a linguagem simbólica e natural, conforme representado nas figuras:

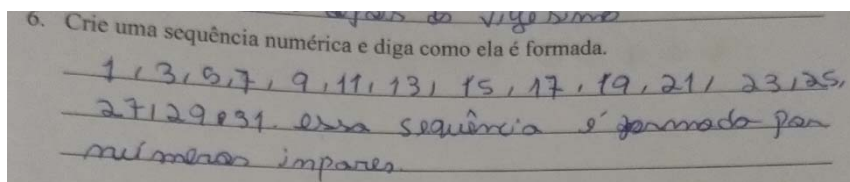


Figura 74. Questão 6 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

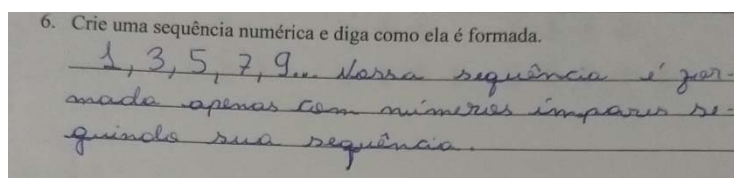


Figura 75. Questão 6 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Balanco

Representações utilizadas pelos alunos para compreender padrões e regularidades. Nesta aula, os alunos usaram quatro tipos de representações para compreender os padrões e as regularidades nas sequências: (1) Representações ativas; (2) Linguagem oral; (3) Linguagem natural; e (4) Linguagem simbólica.

A representação ativa apareceu na questão 1, ao apontar com o dedo indicador direito os termos da sequência. Já a linguagem oral aparece nas questões 3 e 4 quando os alunos responderam quais são as quantidades de bolas nas sequências. A

linguagem natural escrita aparece questões 1, 5 e 6, ao expressarem os seus pensamentos através da linguagem materna. A linguagem simbólica é usada nas questões 6 quando os alunos usam a escrita simbólica dos Algarismos para relacionar com os termos das sequências. A representação icônica é usada na questão 1, quando expressam as suas sequências com desenhos.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar sequências. Nesta aula, os alunos usam 2 tipos de estratégias. (1) Identificação de uma regularidade; e (2) representação e contagem. A estratégia de identificação de uma regularidade surge na questão 2. A estratégia de representação e contagem surge nas questões 1, 3 e 5.

Dificuldades dos alunos para compreender padrões e regularidade em sequências. Nesta aula, identifiquei 2 tipos de dificuldades: (1) Dificuldade de interpretação; e (2) Dificuldade de distinguir números pares e ímpares. A dificuldade de interpretação surge em virtude do não reconhecimento dos alunos em relacionar a posição dos termos com os números cardinais. A dificuldade em perceber a quantidade de bolas que terá o 2.º termo da primeira sequência e o 30.º termo da segunda é a falta de conhecimento dos alunos dos números são ímpares e pares.

Aula 5 – Exploração da sequência utilizando a reta numérica.

No dia 28 de maio de 2019, realizei a quinta tarefa exploratória, com todos os alunos, 12 meninas e 9 meninos, que foram orientados a trabalhar em dupla, totalizando dessa forma 9 grupos. A aula durou aproximadamente 45 min.

Realização da tarefa em aula

A aula 5 envolveu a exploração de uma tarefa que contém uma reta numérica.

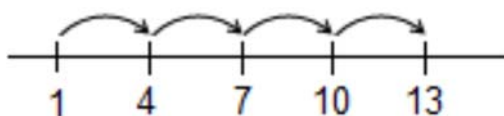


Figura 76. Reta numérica com os números 1, 4, 7, 10 e 13

Fonte: Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC

Questão 1

A questão 1 solicitava que os alunos descrevessem os termos da sequência. Para descrevê-los se esperava que os alunos relacionassem o primeiro termo ao número um, o segundo termo ao número quatro, o terceiro termo ao número sete, o quarto termo ao número dez e o quinto termo ao número treze. Os alunos poderiam observar que de um termo para o seu sucessor somam-se 3 unidades, ou seja, trata-se de uma progressão aritmética com razão 3. Para responder a essa questão, os alunos usaram como representações a linguagem natural, a representação ativa e a linguagem simbólica.

Ao afirmar que na reta pulam três números, um ímpar e o outro par, seguindo assim a sequência, o grupo usou a linguagem natural para indicar que, na sequência exibida usando a reta numérica, para encontrar o próximo termo é preciso somar ao antecessor três unidades, sendo que esses termos são intercalados entre números pares e números ímpares, usando assim a estratégia de identificação de uma regularidade.

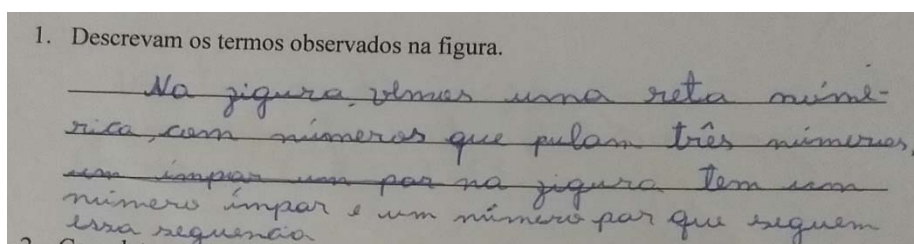


Figura 77. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Um outro grupo, ao afirmar que os termos da sequência eram números que pulavam de três em três (os alunos escreveram de dois em dois, mas pensaram bem), citou como exemplo, a sequência formada pelos números 1, 4, 7, 10 e 13. O grupo associou a linguagem natural à linguagem simbólica, mostrando ter usado a estratégia de identificação de uma regularidade. O grupo considerou uma sequência de números naturais formada por intervalos abertos, ou seja, o grupo não considerou os seus extremos, isto é, no intervalo entre 1 e 4, só existem dois números: 2 e 3. No intervalo entre 4 e 7, só existem dois números: 5 e 6. No intervalo entre 7 e 10, só existem dois números: 8 e 9. No intervalo entre 10 e 13, só existem dois números: 11 e 12. Resumidamente, o grupo desenvolveu a seguinte lei de formação para determinar os termos da sequência: Sendo $C \subset \mathbb{N}$, a, b e $n \in C$, $C = (a, b)$, $n \in C$; $C = \{a < n < b\}$, eles expressaram $\#C$ (a cardinalidade de C).

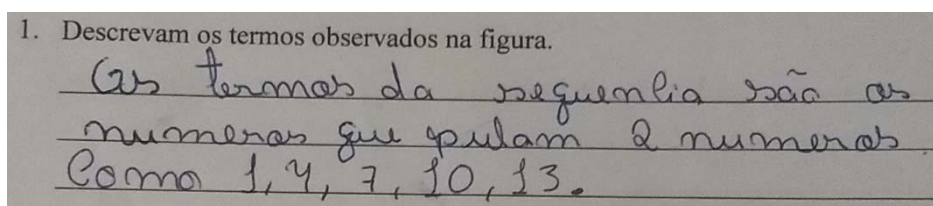


Figura 78. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e linguagem simbólica

Outro grupo, por sua vez, ao escrever que número par: 4 e 10. Número ímpar: 1, 7, 13, usaram a linguagem natural associada à linguagem simbólica para exibir a estratégia de identificação de uma regularidade, indicando que na sequência existem números pares e ímpares, mas demonstram dificuldade em exibir padrão:

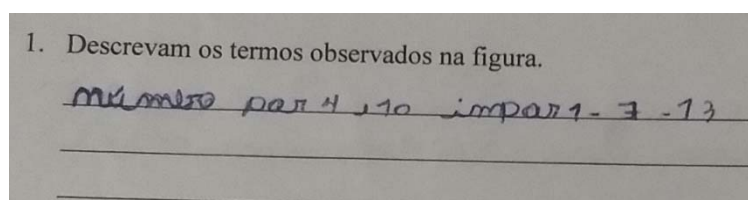


Figura 79. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Um outro grupo usou a linguagem natural para expressar o reconhecimento do padrão da sequência. Ao afirmarem que observaram uma reta numérica que aumentava três números de um para o outro, os reconhecem que o padrão formador da sequência é sempre adicionar o número 3. Usaram assim a estratégia de identificação de uma regularidade

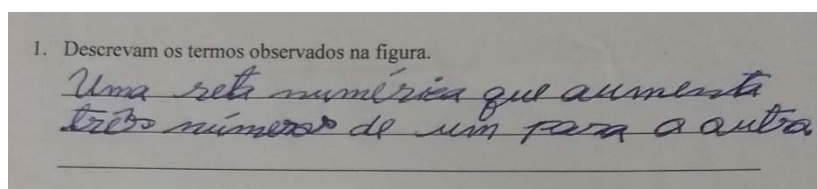


Figura 80. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Outro grupo usou a linguagem natural associada à linguagem simbólica, ao escrever que os termos da sequência são; 1 ímpar, 4 par, 7, ímpar, 10 par e 13 ímpar.

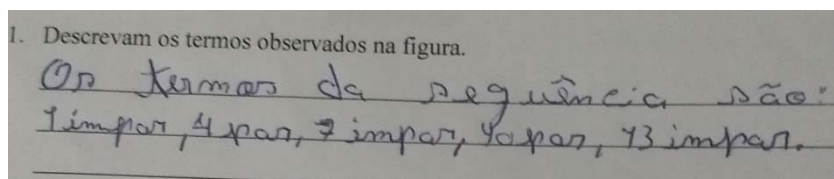


Figura 81. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Questão 2

A segunda questão solicitava que os alunos escrevessemos próximos cinco termos da sequência. Para tanto, os alunos deveriam perceber que a razão formadora era adicionar o número 3. No momento da exploração, fui chamado por um grupo que disse que não havia entendido à questão:

Ronaldinho Gaúcho: Professor, nós não estamos entendendo.

Professor: O que vocês não estão entendendo.

Ronaldinho Gaúcho: O que é fazer aqui. (apontou com a caneta para a segunda questão)

Professor: Vocês já leram à questão? Leiam aí para eu ouvir.

Ronaldinho Gaúcho: Com-ple-te a se-quen-cia com os pró-xi-mos cin-co ter-mos (leu soletrando).

Professor: E agora? O que é para fazer?

Ronaldinho Gaúcho: Ainda não sei.

Professor: O que quer dizer termo?

Ronaldinho Gaúcho: Eu não sei.

Percebi que a dificuldade do aluno era por dois motivos que estão relacionados. (1) A dificuldade na leitura; e (2) O não entendimento da palavra “termo” gerando assim dificuldade de interpretar a questão:

Professor: Termo que dizer número. Quais são os próximos cinco números da sequência? O primeiro termo vale quanto?

Ronaldinho Gaúcho: Um.

Professor: E o segundo?

Ronaldinho Gaúcho: Quatro.

Professor: E terceiro?

Ronaldinho Gaúcho: Sete.

Professor: E o quarto?

Ronaldinho Gaúcho: Dez.

Professor: E o quinto?

Ronaldinho Gaúcho: Treze.

Professor: Como vai para determinar o sexto termo?

Ao interagir com o professor, o aluno demonstrou entendimento da questão. Usou a linguagem oral para expressar o seu raciocínio:

Ronaldinho Gaúcho: Eu vou fazer um negócio aqui (Fez um movimento no ar para reproduzir a seta que está indicada na reta numérica, usando uma representação ativa) e escrever o número em baixo.

Professor: E que número você vai escrever em baixo?

Ronaldinho Gaúcho: O número oito.

Professor: Por que oito?

Ronaldinho Gaúcho: Para colocar um número par.

Professor: Mas observe. Você acha que existe alguma lógica para escrever esses números?

Ronaldinho Gaúcho: Não.

Professor: Daqui para cá foi acrescentado quanto? (apontei de 1 para 4)

Ronaldinho Gaúcho: Dois.

Professor: Você quer dizer que um mais dois é quatro?

Ronaldinho Gaúcho: Não! Acrescentou 3.

Professor: Por quê?

Ronaldinho Gaúcho: Porque um para chegar a 4 bota mais 1, mais 1 mais e dá 4.

Professor: E daqui para cá. Acrescentou ou diminuiu? (apontei de 4 para 7).

Ronaldinho Gaúcho: Acrescentou.

Professor: Quanto?

Gustavo: Onze.

Professor: Por que onze?

Gustavo: Doze.

Professor: Por que doze?

Ronaldinho Gaúcho: Três (Contou nos dedos usando uma representação ativa)

Professor: Por quê?

Ronaldinho Gaúcho: Porque tem quatro. Bota cinco. Bota seis. Bota 7 (mostra os dedos e dessa forma usa uma representação ativa)

Professor: E do sete para o dez? Você vai acrescentar quanto?

Ronaldinho Gaúcho: Três também.

Professor: E do dez para o treze?

Ronaldinho Gaúcho: Três também.

Professor: E depois você vai acrescentar quanto?

Ronaldinho Gaúcho: Três.

Professor: E depois?

Ronaldinho Gaúcho: Três.

Professor: E depois?

Ronaldinho Gaúcho: Três

Professor: E depois?

Ronaldinho Gaúcho: Três.

Professor: E quais serão esses números?

Professor: Por quê?

Ronaldinho Gaúcho: 16, 19, 22, 25 e 28. (Ele disse ao contar nos dedos, usando dessa forma a linguagem oral e a representação ativa).

Professor: Por que são esses números?

Ronaldinho Gaúcho: Porque é a sequência do três.

Após usar a linguagem oral, o aluno usou as representações ativas e a linguagem simbólica para expressar a estratégia de identificação de uma regularidade:

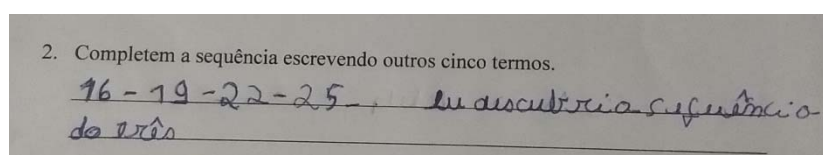


Figura 82. Questão 2 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e linguagem simbólica

Questão 3

A questão três perguntava qual é o 22.º termo dessa sequência. Um possível raciocínio para responder era fazer uma correspondência biunívoca entre os termos da sequência e os números na reta estabelecendo assim uma função em que o número depende da posição do termo, ou seja, a posição do termo é a variável independente e o número a variável dependente e que para cada termo existe uma quantidade de bolas e essa quantidade é única, isto é, a quantidade de bolas é função da posição do termo como, por exemplo, ilustrado a tabela:

Termo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Número	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28

Figura 83. Quadro relacionando o termo com o número

Termo	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
Número	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58

Figura 84. Quadro relacionando o termo com o número

Termo	21º	22º
Número	61	64

Figura 85. Quadro relacionando o termo com o número

Outra possível solução era compreender que a partir do 2.º termo, para encontrar um número qualquer, basta multiplicar a posição do termo anterior por 3 e somar com a constante 1, valor do primeiro termo, resumidamente temos: $a_n = (n - 1)r + 1$. Neste caso o 22.º termo poderia ser calculado assim: $21 \times 3 + 1 = 64$. Um grupo de alunas estava sentido dificuldade, por esse motivo me chamaram:

Isabella: Professor, nós não estamos entendendo essa questão.

Professor: O que está escrito na questão?

Isabella: Qual é o 22.º termo da sequência?

Professor: Então...Qual é a dúvida?

Isabella: Porque do um, ao invés de pular para o número para mais próximo dele que é o dois, está pulando para o número 4 que é o segundo número par mais próximo dele. E do número par está pulando para o segundo número ímpar mais próximo dele e assim vai seguindo.

Para a aluna, a sequência obedecia à seguinte regra: se um número for ímpar, o seu sucessor será o segundo número para mais próximo. Se um número foi par, o seu sucessor será o segundo número ímpar mais próximo. Por exemplo, o sucessor de 1 é 4. O sucessor de 4 é 7. O sucessor de 7 é 10. O sucessor de 10 é 13. Resumidamente, a assume a forma: $2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3, 2n+4, \dots$ em que n é um número natural e representa a posição do termo. De acordo com o raciocínio das alunas, os seus sucessores seriam:

Posição dos termos (n)	Fórmula	Número	Sucessor
1	$2n-1$	1	4
2	$2n$	4	7
3	$2n+1$	7	10
4	$2n+2$	10	13
5	$2n+3$	13	16
6	$2n+4$	16	19
7	$2n+5$	19	22
8	$2n+6$	22	25
9	$2n+7$	25	28

Figura 86. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o sucessor

Ou seja, para calcular o valor de cada termo em função da sua posição é preciso multiplicar a posição por 3 e ao resultado subtrair do termo duas unidades. Sintetizando, $a_n = 2n + (n-2) = 3n-2$. De acordo com o raciocínio das alunas, para encontrar o sucessor de um número qualquer, basta somar 3 ao antecessor, ou seja, o sucessor de $a_n = 3n-2$ será $a_{n+1} = 3n+1$:

Isabella: Aqui está perguntando qual é o 22.º termo da sequência. Por isso não estamos entendendo. Porque fizemos aqui e não deu 22. Porque está pulando. Pulou para o três.

Isabella: Cada número está pulando dois números. Tipo um, dois, três (apontando com os dedos, dessa forma a aluna usa uma representação ativa para expressão o seu raciocínio) pula para o quatro.

Mariana: Cinco e seis pula para o sete.

Isabella: Oito e nove pula para o dez.

Mariana e Isabella: onze e doze pula para o treze.

Isabella: e aí vai pulando dois números.

Ao afirmar que os termos da sequência eram números que pulam de dois em dois, as alunas associaram a linguagem natural à linguagem simbólica, para exibirem a estratégia de identificação de uma regularidade. As alunas consideraram uma sequência de números naturais formada por intervalos abertos, ou seja, não consideraram os seus extremos, isto é, no intervalo entre 1 e 4, só existem dois números: 2 e 3. No intervalo entre 4 e 7, só existem dois números: 5 e 6. No intervalo entre 7 e 10, só existem dois números: 8 e 9. No intervalo entre 10 e 13, só existem dois números: 11 e 12. Resumidamente, o grupo desenvolveu a seguinte lei de formação para determinar os termos da sequência: Sendo $C \subset \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}$ e $n \in C$, $C = (a, b)$, $n \in C$; $C = \{a < n < b\}$, eles expressaram $\#C$ (a cardinalidade de C):

Professor: Treze e quatorze, pula para o...?

Mariana e Isabella: Dezesesseis.

Professor: Depois?

Mariana e Isabella: Dezenove.

Professor: Depois?

Mariana e Isabella: Vinte e três. Não fizemos errado vinte e dois.

Professor: E qual será o 22º termo?

Mariana: 64.

Professor: Porque pulamos de dois em dois números até chegar lá.

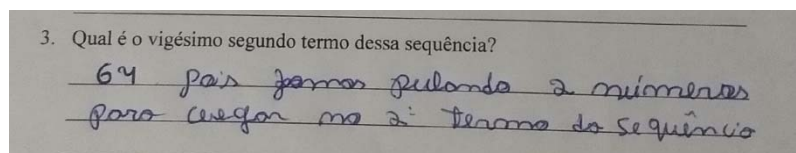


Figura 87. Questão 3 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Questão 4

A questão 4 solicitava que os alunos esclarecessem se eles usaram alguma regra para descobrir a sequência anterior. Em caso afirmativo qual foi? Ao afirmar que para descobrir a sequência foi pulando de dois em dois, os grupos usam a linguagem natural para expressar a estratégia de identificação de uma regularidade:

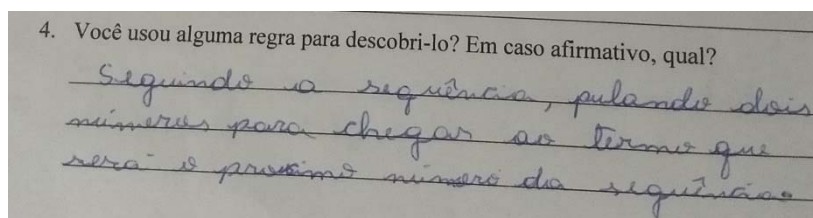


Figura 88. Questão 4 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

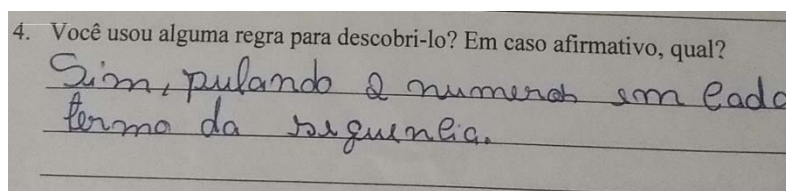


Figura 89. Questão 4 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Ao escrever que a regra usada pelo grupo foi perceber que os números aumentam de três em três, os alunos usaram a linguagem natural para expressar a estratégia de identificação de uma regularidade. Eles perceberam que para formar a sequência basta somar a razão três ao sucessor e determinando assim o sucessor de cada número.

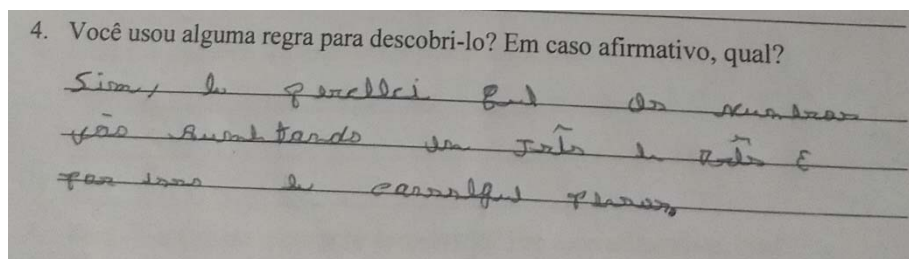


Figura 90. Questão 4 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Balanco

Representações utilizadas pelos alunos para compreender padrões e regularidades. Nesta aula, os alunos usaram quatro tipos de representações para compreender os padrões e as regularidades nas sequências: (1) Representações ativas; (2) Linguagem oral; (3) Linguagem natural escrita; e (4) Linguagem simbólica. O uso da representação ativa surge nas questões 1 e 2 quando os alunos usam gestos para expressar os seus pensamentos. O uso da linguagem oral surge na questão 1 quando um aluno verbaliza o seu pensamento. A linguagem natural surgiu nas questões 1, 2, 3 e 4 quando os alunos expressam o seu raciocínio através da escrita em língua materna. A linguagem simbólica surge nas questões 1 e 2 quando os alunos usaram símbolos matemáticos para expressar o seu pensamento.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar seqüências. Nesta aula, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade. Essa estratégia surgiu nas questões 1, 2, 3 e 4.

Dificuldades dos alunos para compreender padrões e regularidades. Nessa aula, identifiquei dificuldade na leitura e na interpretação na questão 2 em virtude do não conhecimento da palavra termo. Demonstraram dificuldade em indicar a lei de formação, na questão 1.

Aula 6 – Exploração da sequência mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescente

No dia 29 de maio de 2019, desenvolvi a sexta tarefa exploratória. No dia da aula estavam presentes 20 alunos. 12 meninas e 8 meninos. Eles foram orientados a

Ronaldinho Gaúcho: Porque é para repetir os próximos dois termos.

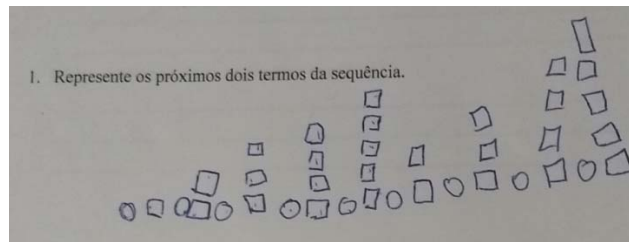


Figura 92. Questão 1 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica

O grupo 2 continuou a sequência, com uma representação icônica, levando em consideração os próximos dois termos, isto é, o décimo primeiro e o décimo segundo, que eram, respectivamente, um círculo e seis quadrados. Os alunos deste grupo repetiram a sequência duas vezes, pois não a consideraram em partes, mas sim como um todo.

Professor: Gabrielly, por que está riscado aqui? (aponte para a representação feita por eles)

Gabrielly: Porque nos atrapalhamos.

Professor: Como assim?

Gabrielly: Depois que nós vimos que eram só os próximos dois termos.

Professor: E porque vocês riscaram esses dois quadrados.

Garielly: Porque essa não é a forma da sequência.

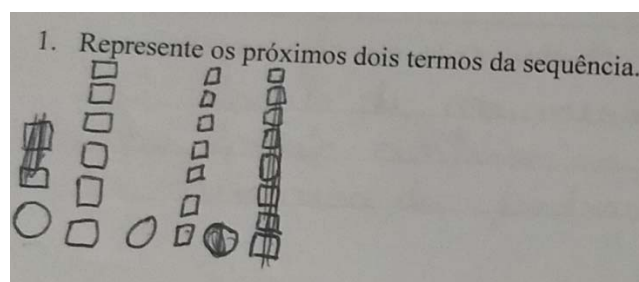


Figura 93. Questão 1 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica

Ao exibir a sequência com desenhos, o grupo usou a representação icônica para externalizar o seu raciocínio. Já ao ser questionada porque dos riscos na representação, a

aluna usou a linguagem oral para mostrar o seu pensamento em relação à compreensão do padrão que forma a sequência.

Questão 2

A segunda questão da tarefa solicitava que os alunos respondam se existia alguma diferença ou alguma semelhança entre a sequência do exemplo e a sequênciarepresentada por eles. Para responder, os alunos usaram a linguagem natural.

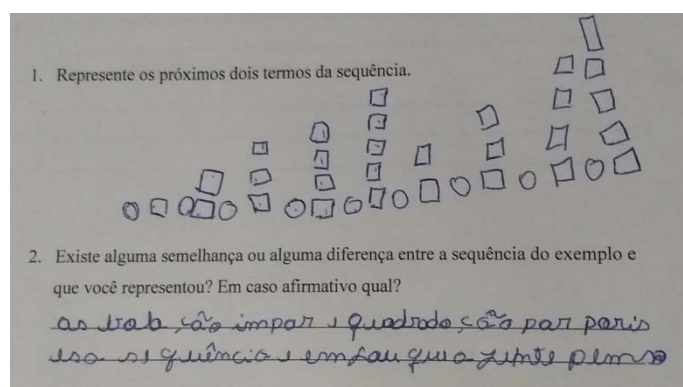


Figura 94. Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita

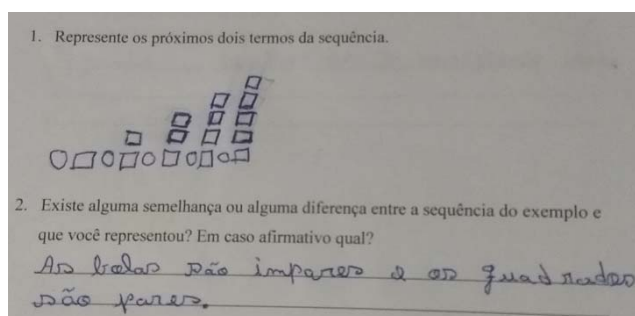
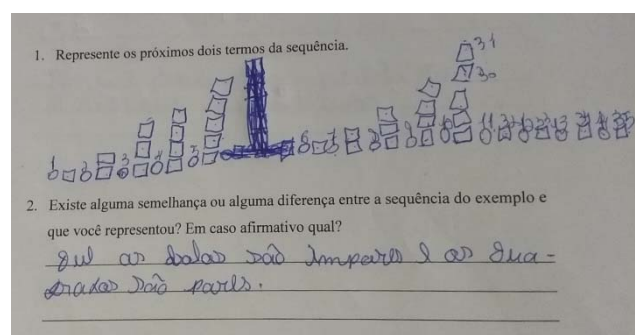
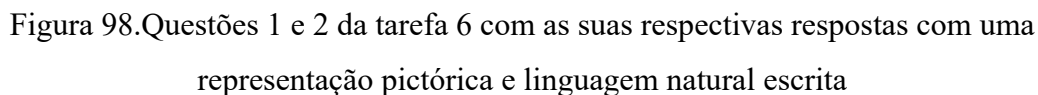
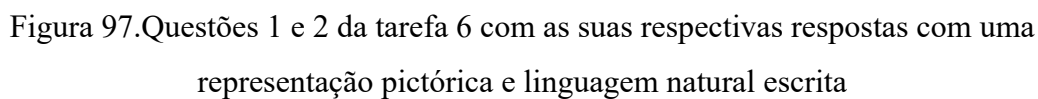


Figura 95. Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita



Ao afirmar as bolas eram ímpares, para se referir aos círculos, e que os quadrados eram pares, os alunos usam a linguagem natural para mostrar que a regularidade que consideraram foi os círculos ocuparem os termos de ordem ímpar e os quadrados ocuparem termos de ordem par.



Ao escrever que a semelhança entre a sequência reproduzida pelo grupo e a sequência do exemplo foi que cada bola tinha um número, para se referir à posição do termo do círculo e que esse número representava a quantidade de quadrinhos, para se referir o número de quadrados, o grupo usou a linguagem natural para expressar o seu pensamento. Para as alunas, o número de quadro é função da posição do termo do círculo. Ao usar a linguagem natural, os seus pensamentos ficam mais claros. Elas explicaram que se o círculo estivesse no primeiro termo, haveria um quadrado, se o círculo estivesse no segundo termo, haveria dois quadrados se o círculo está no terceiro termo haveria três quadrados e assim sucessivamente.

Questão 3

A questão 3 perguntava qual foi a estratégia que os alunos usaram para representar a sequência. Entretanto, há um equívoco na questão, uma vez que as sequências não são representadas por estratégias. O professor poderá retificá-la, ao perguntar qual foi a estratégia usada para descobrir quais os próximos dois termos da sequência. Para respondê-la, os alunos usaram a linguagem natural.

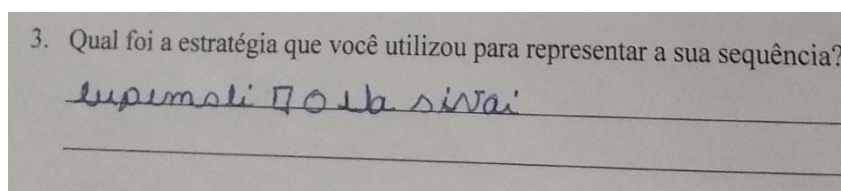


Figura 101. Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica e linguagem natural escrita

Ao escrever que pensou e desenhou um círculo e um quadrado e afirmar que assim vai, o grupo usou a linguagem natural associada à representação icônica para indicar que usou a estratégia da identificação de uma regularidade para descobrir os próximos dois termos da sequência:

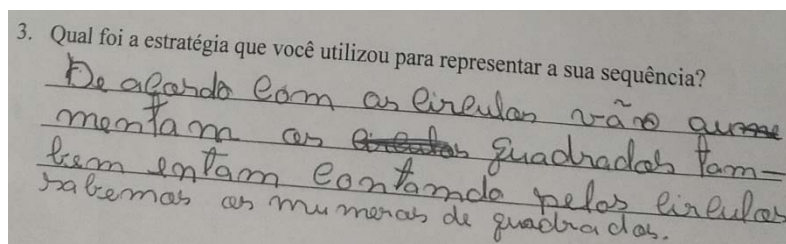


Figura 102. Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Ao escreverem que à medida que os círculos iam aumentando, para indicarem que a ordem é crescente, o número de quadrados aumenta e que pela posição do círculo era possível determinar o número de quadrados, os alunos usaram a linguagem natural para expressar que usou a estratégia de identificação de uma regularidade para continuar a sequência.

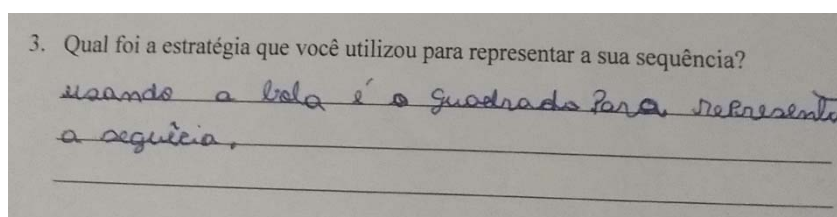


Figura 103. Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

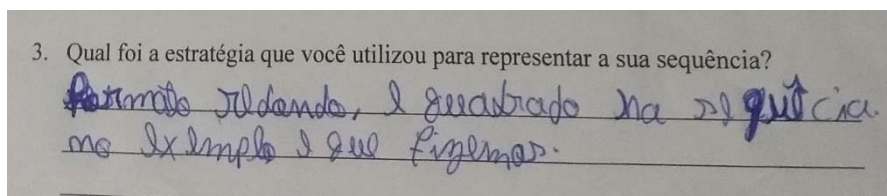


Figura 104. Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Ao escrever que usaram a bola e quadrado para representar a sequência, os alunos usaram a linguagem natural escrita para afirmar que construíram a sua sequência observando as formas dos objetos, para esclarecer que usaram a estratégia de identificação de uma regularidade.

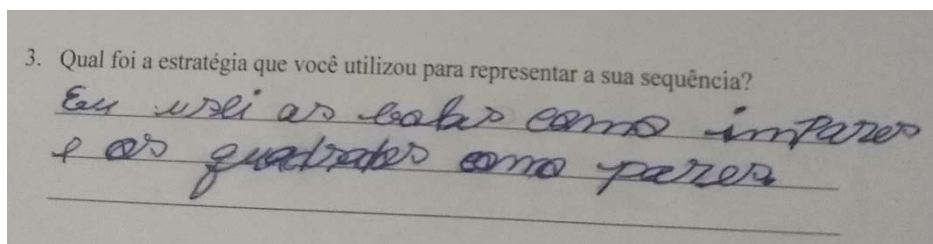


Figura 105. Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Ao escrever que sabe que as bolas eram ímpares, para se referirem as posições dos termos dos círculos e que os quadrados eram pares, para se referirem as posições dos termos dos quadrados, os alunos usaram a linguagem natural escrita para afirmar que em suas sequências os termos de ordem ímpar são círculos e que os termos de ordem par são quadrados usando dessa forma uma estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 4

A questão 4 solicitava que os alunos respondessem se o trigésimo termo dessa sequência era um círculo ou um quadrado. Nesta questão os alunos poderiam seguir várias estratégias. Uma delas seria representar todos os termos até ao 30.º (estratégia de representação e contagem). Os alunos poderiam fazer uma tabela relacionando a ordem dos termos da sequência com as iniciais dos nomes das suas unidades, ou seja, **C** para círculo e **Q** para quadrado e verificar que o 30.º termo seria um quadrado.

Termo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Objeto	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q

Figura 106. Quadro relacionando os termos com os objetos

Termo	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
Objeto	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q

Figura 107. Quadro relacionando os termos com os objetos

Termo	21º	22º	23º	24º	25º	26º	27º	28º	29º	30º
Objeto	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q

Figura 108. Quadro relacionando os termos com os objetos

Outra estratégia seria identificar a regularidade, compreendendo que os termos de ordem ímpar são círculos e que os termos de ordem par são quadrados e que, sendo o trigésimo termo um termo de ordem par, será um quadrado (identificação de uma regularidade). Estabelece-se assim uma função de duas sentenças em que a viável independente é a ordem e a variável dependente são os objetos, isto é: $f(x) = \text{círculo se } x \text{ for ímpar, } f(x) = \text{quadrado se } x \text{ for par}$.

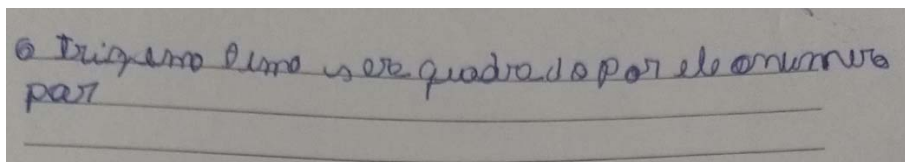


Figura 109. Resposta da questão 4 da tarefa 6 com o uso da representação em linguagem natural escrita

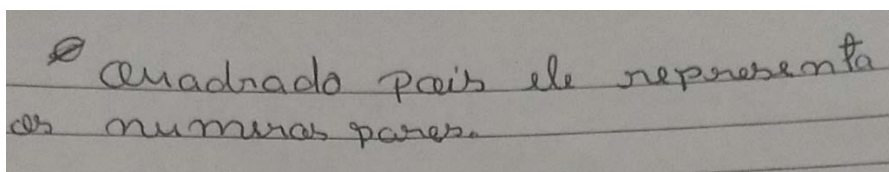


Figura 110. Resposta da questão 4 da tarefa 6 com o uso da representação em linguagem natural escrita

Ao afirmar que o trigésimo termo seria um quadrado, porque era um número par, os alunos usaram a linguagem natural escrita para expressar os seus raciocínios. Eles demonstraram compreender que nessa sequência os elementos de ordem par só poderiam ser quadrados, usando a estratégia de identificação de uma regularidade.

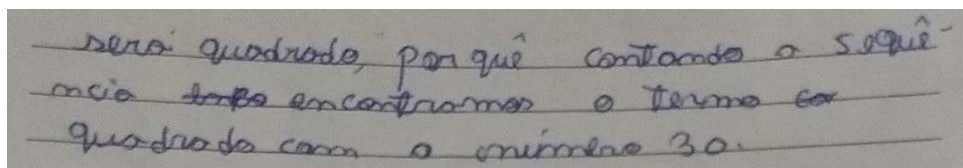


Figura 111. Resposta da questão 4 da tarefa 6 com o uso da representação em linguagem natural escrita e simbólica

Ao afirmar que o 30.º elemento seria um quadrado, porque, ao contar, ele foi encontrado, os alunos usaram a linguagem natural, e, aparentemente, seguiram uma estratégia de representação e contagem.

Questão 5

A quinta questão faz uma referência à quarta questão. Nela se buscou saber, caso os alunos tenham respondido círculos, quantos seriam, caso os alunos tenham respondido quadrados, quantos seriam. Se esperava que os alunos respondam que serão 15 quadrados.

Ao responder que eram 15 quadrados, pois é a metade de 30, os alunos usaram a linguagem natural, associada à linguagem simbólica, com base numa estratégia de identificação de uma regularidade:

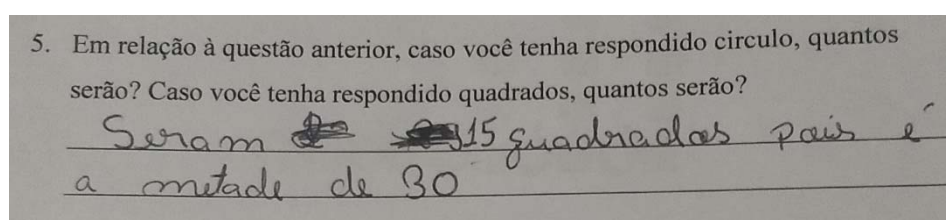


Figura 112. Questão 5 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Questão 6

A sexta questão fez referência à quinta. Ao perguntar como os alunos fizeram para responder a questão, se buscou compreender qual foi o raciocínio empregado nela. Eles podiam, por exemplo, usar uma tabela, com a quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome, para fazer uma correspondência com o número de quadrados e a posição dos termos e observar que esse número é sempre a metade dessa posição (estratégia de representação e contagem).

Termo		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Quantidade	Objeto	1C	1Q	1C	2Q	1C	3Q	1C	4Q	1C	5Q

Figura 113. Quadro relacionando o termo com quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome

Termo		11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
Quantidade	Objeto	1C	6Q	1C	7Q	1C	8Q	1C	9Q	1C	10Q

Figura 114. Quadro relacionando o termo com quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome

Termo		21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
Quantidade	Objeto	1C	11Q	1C	12Q	1C	13Q	1C	14Q	1C	15Q

Figura 115. Quadro relacionando o termo com quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome

E dessa forma os alunos podiam chegar à conclusão: se o termo for uma posição ímpar, temos um círculo, se o termo for uma posição par, temos um quadrado e a sua quantidade será a metade do valor da posição, seguindo uma estratégia de identificação de uma regularidade. Vejamos o que se passa no Grupo 1:

Professor: Como vocês chegaram a esse resultado? Que no 30.º termo são 15 quadrados?

Gabryela: Nós observamos a sequência e vimos que no número 2, tem 1 quadrado, no número 4 tem 2 quadrados, no número 8 tem 4 quadrados, no número 10 tem 5 quadrados, então vimos que é sempre a metade, então no número 30 terá 15 quadrados

Professor: Parabéns, gostei!

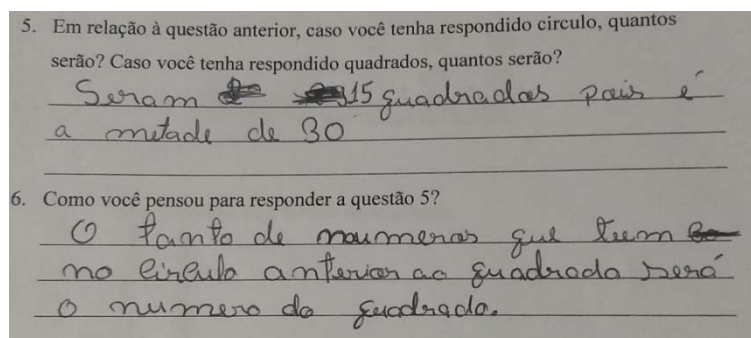


Figura 116. Questões 5 e 6 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e representação escrita

Ao escrever que o tanto de número que tem no círculo anterior, para se referir à ordem do termo que o círculo ocupa, seria o número de quadro, o grupo usou linguagem natural para indicar que, na sequência, após o primeiro círculo, tinha um quadrado, após o segundo círculo tinham dois quadrados, após o terceiro círculo tinham

três quadrados e assim sucessivamente. Apesar de não ter escrito na questão 6, registrou na questão 5, além disso, o grupo usou a linguagem oral para explicar que a quantidade de quadrados é a metade do número que ele está, para se referir que se o termo é dois, tinha um quadrado, se o termo era quatro tinham dois quadrados. Dessa forma, concluiu que no 30.º termo haveria 15 quadrados, pois 15 era a metade de 30.

Vejamos, de seguida, o Grupo 2. Ao escrever que observando que o número de quadrados quando tinha 2, para se referir ao segundo termo, era 1, então o quadrado trinta, para se referir ao 30.º termo, serão 15 quadrados, a dupla de alunos usa a linguagem para natural expressar um raciocínio semelhante ao do grupo 1. Os alunos pareceram ter seguido igualmente a estratégia de identificação de uma regularidade:

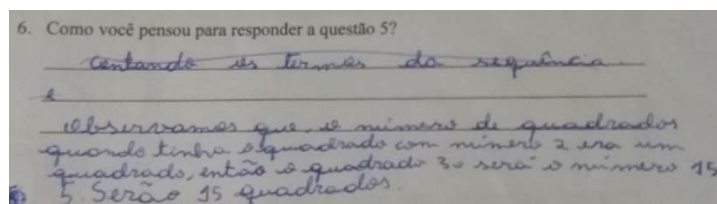


Figura 117. Questão 6 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Observemos, finalmente, o Grupo 3. Ao escrever que fazendo a conta de 30 dividindo por 2, o grupo usou a linguagem natural e a linguagem simbólica, para afirmar que o número de quadrados era a metade do número do termo que ele ocupava na posição da sequência. Os alunos expressaram assim um raciocínio similar aos dos grupos 1 e 2. Os alunos os aparentaram ter seguido a estratégia de identificação de uma regularidade.

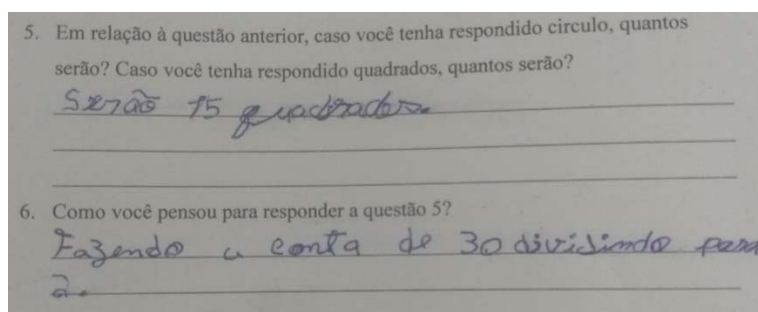


Figura 118. Questões 5 e 6 da tarefa 6 ambas com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica

Balanço

Representações utilizadas pelos alunos para compreender os padrões e regularidades. Nesta aula, os alunos usaram quatro tipos de representações para compreender os padrões e as regularidades nas seqüências: (1) Linguagem oral; (2) Linguagem natural escrita; (3) Linguagem simbólica; (4) Representação icônica. A linguagem oral apareceu nas questões 1 e 6 quando os alunos verbalizaram o seu raciocínio. A linguagem natural escrita apareceu nas questões 2, 3, 4, 5 e 6 quando os alunos escreveram os seus raciocínios na linguagem materna. A representação simbólica apareceu na questão 6, quando os alunos escreveram os números usando símbolos matemáticos. A representação icônica apareceu nas questões 1 e 3 quando os alunos usaram desenhos para expressar os seus raciocínios.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar seqüências. Nesta aula, os alunos usaram 2 tipos de estratégias. (1) Identificação de uma regularidade. Representação e contagem. A estratégia de identificação de uma regularidade surgiu nas questões 3 e 4. A estratégia de representação e contagem surgiu nas questões 4.

Dificuldades que os alunos expressam para compreender padrões e regularidade em seqüências. Nesta aula, os alunos demonstraram sentir dificuldades de leitura e interpretação.

Aula 7 – Exploração da sequência com critérios de divisibilidade

No dia 30 de maio de 2019, desenvolvi a sétima tarefa exploratória. No dia da aula estavam presentes 20 alunos. 12 meninas e 8 meninos. Eles foram orientados a trabalhar em dupla, totalizando dessa forma 9 grupos. A aula durou aproximadamente 1 h: 20 min.

A tarefa

A tarefa envolvia a exploração de uma tarefa que contém uma sequência para trabalhar critérios de divisibilidade.



Figura 119. Sequência repetitiva formada por garfo, faca e prato

Questão 1

A primeira questão solicitava que os alunos escrevessemos seis próximos termos da sequência. Para respondê-la, eles usaram representação icônica quando se expressaram através dos desenhos e a linguagem natural escrita e a estratégia de identificação de uma regularidade; garfo, faca, prato, garfo, faca e prato.

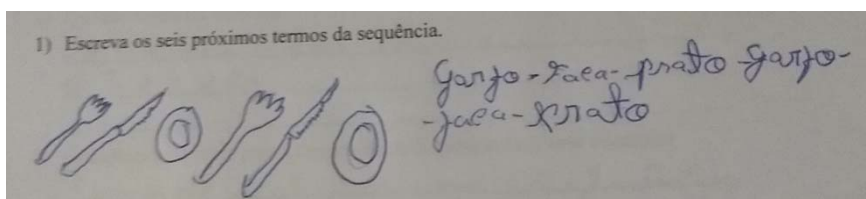


Figura 120. Questão 1 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica em linguagem natural escrita

Questão 2

A segunda questão solicitava que os alunos esclarecessem que estratégia eles usaram para escrever os seis termos da sequência acima.

Esse grupo, ao responder desenhos, usou a linguagem natural escrita para afirmar que usou a representação icônica para se referir à estratégia de identificação de uma regularidade

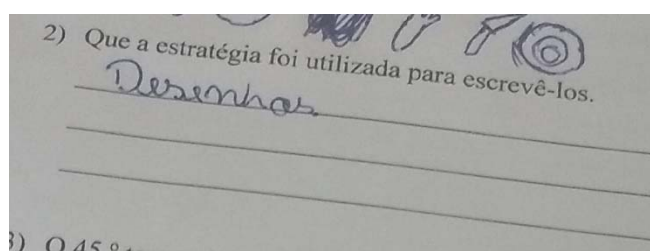


Figura 121. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Os grupos abaixo usaram a linguagem natural escrita para expressar os seus pensamentos.

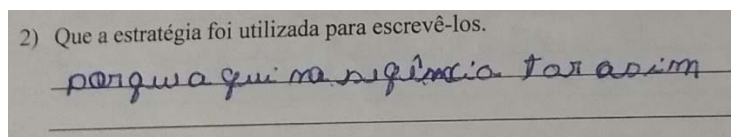


Figura 122. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

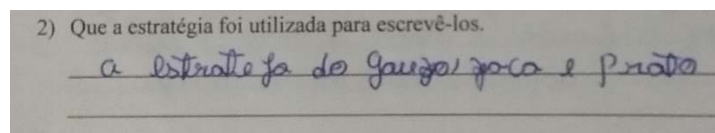


Figura 123. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

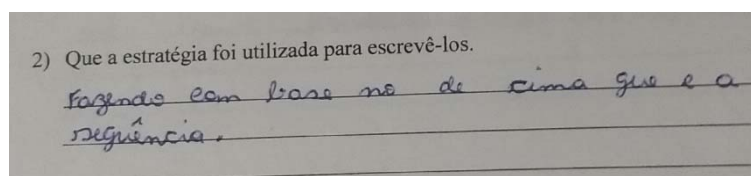


Figura 124. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

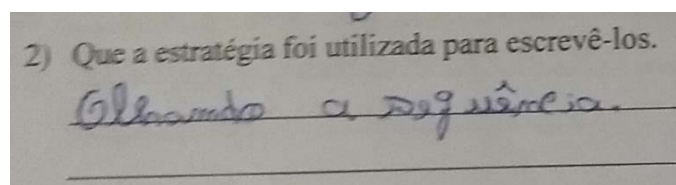


Figura 125. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

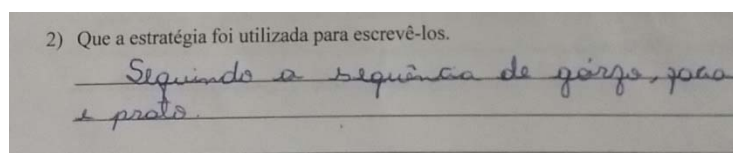


Figura 126. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita

Questão 3

A questão 3 perguntava qual é 45º termo da sequência. Um possível raciocínio para respondê-la seria considerar três conjuntos cujos elementos são as ordens ocupadas pelos objetos, ou seja, $\mathbf{G} = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$, $\mathbf{F} = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$ e $\mathbf{P} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$, onde \mathbf{G} é o conjunto cujos elementos são garfos, \mathbf{F} é o conjunto cujos elementos são facas e \mathbf{P} é o conjunto cujos os elementos são pratos. Dessa forma, fazer uma correspondência entre os termos da sequência e os objetos (garfo, faca e prato) que dependem da posição do termo, ou seja, a posição do termo é a variável independente e os objetos a variável dependente, sendo que para cada termo existe um único, isto é, o objeto é função da posição do termo como, por exemplo, é ilustrado nas tabelas.

Posição dos termos (n)	Fórmula	Número	Objeto
1	$2n-1$	1	Garfo
2	$2n$	4	Garfo
3	$2n+1$	7	Garfo
4	$2n+2$	10	Garfo
5	$2n+3$	13	Garfo
6	$2n+4$	16	Garfo
7	$2n+5$	19	Garfo
8	$2n+6$	22	Garfo
9	$2n+7$	25	Garfo
.			Garfo
.			
.			
n	$2n + (n - 2)$		Garfo

Figura 127. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o objeto

Isto é $a_n = 3n-2$

Posição do termo	Número	Fórmula	Objeto
1º	2	$2n$	Faca
2º	5	$2n + 1$	Faca
3º	8	$2n + 2$	Faca
4º	11	$2n + 3$	Faca
5º	14	$2n + 4$	Faca
6º	17	$2n + 5$	Faca

7º	20	$2n + 6$	Faca
8º	23	$2n + 7$	Faca
9º	26	$2n + 8$	Faca
	.		
	.		
	,		
n		$2n + (n - 1)$	Faca

Figura 128. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o objeto

Isto é $a_n = 2n + (n - 1) = 3n - 1$.

Posição do termo	Número		Objeto
1º	3	$3n$	Prato
2º	6	$3n$	Prato
3º	9	$3n$	Prato
4º	12	$3n$	Prato
5º	15	$3n$	Prato
6º	18	$3n$	Prato
7º	21	$3n$	Prato
8º	24	$3n$	Prato
9º	27	$3n$	Prato
	.		
	.		
	,		
n		$3n$	Prato

Figura 129. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o objeto

Isto é $a_n = 3n$

Resumidamente, a sequência é uma função definida por três sentenças, $f(n) = 3n - 2$, se $n \in G$, $f(n) = 3n - 1$, se $n \in F$ e $f(n) = 3n$ se $n \in P$.

Professor: Ronaldinho, por que você disse que o 45º termo dessa sequência é uma faca?

Ronaldinho: Porque eu contei, professor,

Professor: Contou? Como assim?

Ronaldinho: Eu fiz os desenhos e saí contando um por um.

Professor: Faça ai para eu ver.

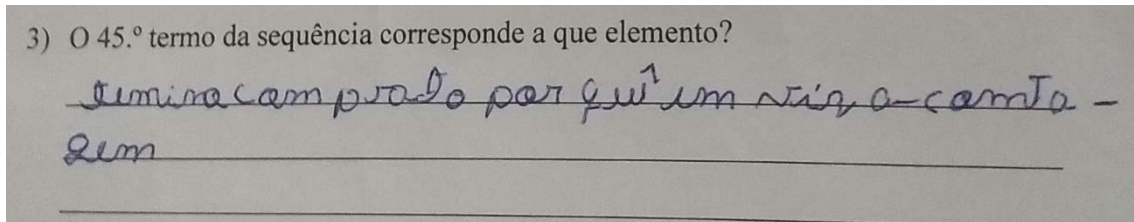


Figura 130. Questão 3 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação da linguagem natural escrita

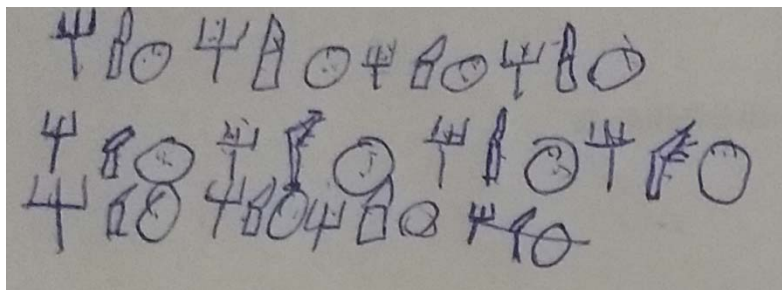


Figura 131. Representação icônica da sequência

Os alunos usaram a linguagem natural oral, ao afirmar que para encontrar o 45º termo da sequência, a linguagem natural escrita ao redigir que termina com prato, porque fez contando, ele usou a estratégia da contagem e para isso fez desenhos usando dessa forma, uma representação icônica. Para isso, ele desenhou 33 objetos, mas se deparou com a dificuldade de continuar representando a sequência com desenhos por seu um processo exaustivo, ele usou a estratégia de identificação de uma regularidade, ao perceber que o garfo, a faca e o prato sempre se repetem nessa ordem. Identificou a primeira faca da sequência como sendo o termo 34 e contou os demais até o 45º e assim encontrou o prato como resposta.

Questão 4

A questão 4 solicitava que os alunos respondessem se o termo 78 pode ser um garfo e explicar o porquê de sua resposta. Nesse quesito, sendo a ordem do garfo um elemento que ao ser colocado em correspondência com os números naturais, pertencente ao conjunto $G = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$ e tendo o seu termo geral expresso por $a_n = 3n - 2$,

ao igualar o termo geral a 78, percebemos que não existe nenhum um número natural que seja solução dessa equação, portanto o termo 78 não pode ser um garfo.

Para respondê-la, os alunos poderiam usar a linguagem natural escrita ou oral para inferir que para determinar a posição dos termos do garfo, só basta multiplicar o termo por três e ao resultado subtrair 2 unidades.

Grupo 1

Professor: Como vocês fizeram essa questão?

Gabryela: Essa daí, eu fiz contando fiz desenhos. Eu numerei. Esses dão garfo. Esses dão faca. Esses dão prato. Eu desenhei aqui. Atrás, eu fiz mais para terminar a conta. E fui contando.

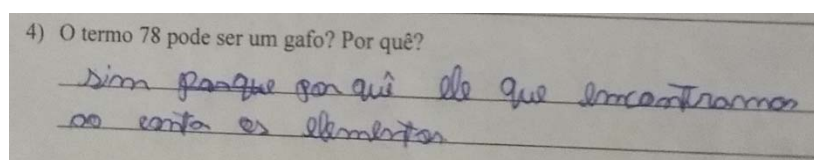


Figura 132. Questão 4 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação da linguagem natural escrita

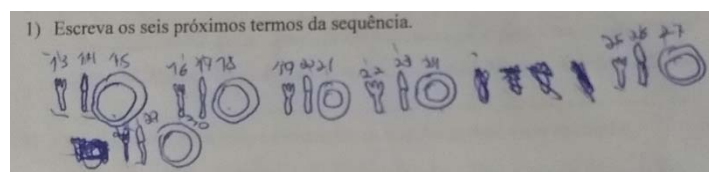


Figura 133. Questão 1 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação simbólica e icônica



Figura 134. Representação da sequência usando as estratégias simbólicas e icônicas

A aluna usou a linguagem natural escrita para afirmar que o termo 78 pode ser um gafo. Já a linguagem oral, Gabryela usou ao afirmar que fez desenhos, para se referir à representação icônica, e que foi contando para se referir à estratégia da contagem. Para isso, ela continuou a sequência do 13º, demonstrando assim que usou a estratégia de identificação de uma regularidade. Porém, apesar de fazer corretamente a correspondência entre as ordens dos termos e os seus elementos, ela comete um equívoco ao afirmar que o termo 78 pode ser um gafo dando a entender assim uma dificuldade de interpretação.

Questão 5

A questão 5 solicitava que os alunos escrevessem uma sequência com 5 termos a partir do termo 132.º. Para responder, era preciso descobrir qual é o objeto que estaria nessa posição. Para tanto, um possível raciocínio é igualar o número 132 ao termo geral das sequências e verificar qual dessas equações tem solução, ou seja, $3n-2 = 132$, $3n-1 = 132$, e $3n = 132$. Ao solucionar a equação, verificamos que apenas a segunda tem solução natural. Logo, o elemento do termo 132 é uma faca.

Os alunos poderiam usar a linguagem natural escrita ou oral para afirmar que o termo 132 era uma faca, pois qualquer elemento dessa sequência poderia ser determinado multiplicando o termo por três e subtraindo do resultado uma unidade.

Grupo 1

Ronaldinho Gaúcho: Professor, não estou entendendo.

Professor: Leia a questão.

Ronaldinho Gaúcho: Escreva uma sequência com cinco termos a partir do 132.

Professor: E aí? Como você acha que vai resolver isso?

Ronaldinho Gaúcho: Contando de novo. (Respondeu com um muxoxo e um semblante de preguiça)

Professor: Pode ser.

Messi: Faça com traços, rapaz.

Ronaldinho Gaúcho: E a terminação?

Professor: Se ele usar muitos traços, como vai saber se é um garfo, uma faca ou um prato?

Messi: Ah! É mesmo.

Cristiano Ronaldo: Mas aí... Primeiro, conta até 32, para saber se vai dar prato, garfo ou faca. Para depois adicionar mais elementos para saber em qual eu estou. Entendeu?

O conflito instaurado, no grupo, tendo como protagonista o elemento 132, demonstra três dificuldades. (1) Falta de atenção ao enunciado, pois ambos leram repetidamente 32 e não 132. (2) Falha de comunicação, pois enquanto Alycy afirmava que era necessário determinar os elementos que sucediam o 32, Cristiano Ronaldo afirmava que tinha que descobri-lo primeiro, para depois determinar os elementos que os sucediam e assim concordavam, com expressões distintas, a necessidade de descobrir que termo era esse, apesar de não entrar em um comum acordo recorrendo assim ao professor. (3) Falta da cultura do trabalho em pares, pois os alunos sempre consultando ao professor.

Alycy: Nós poderíamos numerar.

Professor: Mas aqui não diz 32. Diz 132.

Cristiano Ronaldo: Então... 132.

Professor: Você concorda com ele, Alycy?

Alycy: É 132. Mas eu acho que nós deveríamos contar depois. Entendeu?

Professor: Mas é isso que ele está dizendo.

Cristiano Ronaldo: É isso. Conta até o 132, para depois adicionar mais cinco elementos.

Professor: É isso que ele está falando. Você tem que saber qual é o 132, para depois saber quais são os outros.

Alycy: É para nós escrevermos aqui 133, 134, 135, 136, e 137?

Cristiano Ronaldo: E para escrever até 137.

Professor: É para você escrever qual elemento estará no 133, 134, 135, 136, e 137. Entendeu? No 133 será um gafo, uma faca ou um prato? No 134 será um gafo, uma faca ou um prato? No 135 será um garfo, uma faca ou um prato? No 136 será um garfo, uma faca ou um prato? No 137 será um garfo, uma faca ou um prato? Mas é como ele disse. Primeiro você tem que descobrir qual é o 132. Entendeu?

Alycy: Sim!

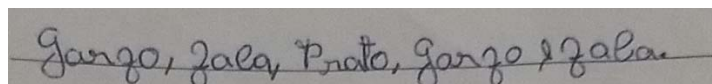


Figura 137. Reposta usando a representação em linguagem natural escrita

Ao escrever garfo, faca, prato, garfo e faca, os alunos usam a linguagem natural escrita, para responder que o elemento 133 é um garfo, o elemento 143 é uma faca, o elemento 135 é um prato, o elemento 136 é um garfo e o elemento 137 é uma faca. Ao escrever os elementos nessa ordem, os alunos mostram que usaram a estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 6

A questão 6 solicitava que os alunos respondam qual foi a estratégia usada por eles para responder a questão 5.

Grupo 2

Professor: Como vocês pensaram para responder a questão 5?

Alycy: Nós contamos até 120. Não foi, Cristiano Ronaldo?

Cristiano Ronaldo: Sim!

Alycy: Aqui tem doze coisas. Fizemos 12 mais 12 é igual a 24. Nós fomos adicionando o 24 a eles e chegou no 120. Agora do 120, contamos até o 132.

Professor: Gostei! Boa estratégia. Entendeu Cristiano Ronaldo?

Cristiano Ronaldo: Sim, eu estou entendendo tudo o que ela está falando.

Professor: Entendi. Você fez 12 mais 12 é igual a 24. Aí você pensou o que mesmo?

Alycy: Aqui tem 12 talheres. Mais 12 ficaria 24. Daí, nós fomos adicionando. Adicionando mais duas vezes 24 mais 24 é igual a 48. 48 mais 24 é 72. 72 mais 24 é 96. E 96 mais 24 dá 120. Agora, nós vamos contar do 120 até o 132.

Professor: Muito bem! E esse 120 seria que elemento?

Alycy: Seria o garfo. Porque ele é primeiro.

Professor: Mas o 24 é primeiro ou o último?

Alycy: É o último.

Professor: Então esse elemento 120 seria o que?

Alycy: O último.

Professor: E o último seria o que?

Cristiano Ronaldo: O prato.

Professor: Muito bem!

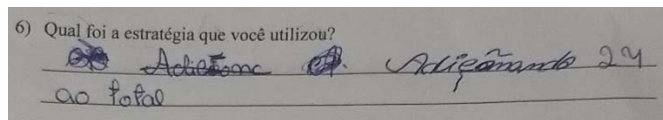


Figura 138. Questão 6 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação simbólica e a linguagem natural escrita

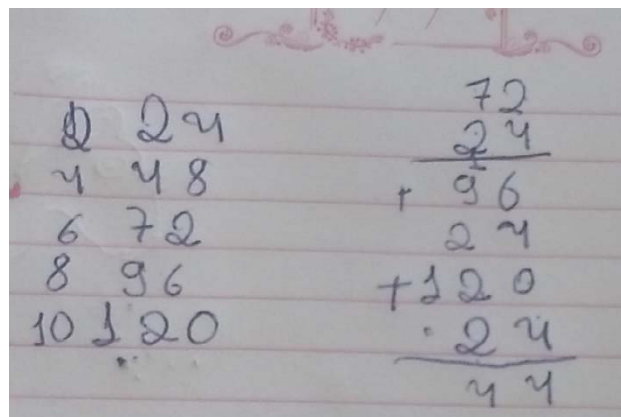


Figura 139. Registro dos cálculos feitos pelos alunos

Ao afirmar que contaram até 120, os alunos usam a linguagem natural oral para se referir que usaram a estratégia da contagem. O grupo ao afirmar que o elemento 24 é o prato mostra a estratégia do reconhecimento de padrão. Ao afirmar que somou o 12 ao 24 e assim procedeu, o grupo afirma que trabalhou agrupando os múltiplos de 12 até chegar ao 120. E contou até o 132 usando outra vez a estratégia da contagem. Ao escrever os cálculos, em uma folha de rascunho, os alunos usam a linguagem simbólica para expressar os seus pensamentos.

Questão 7

A questão 7 solicitava que os alunos escrevam três sequências numéricas. Uma para a faca, outra para o gafo e outra para o prato. Se espera que os alunos percebam

que os garfos são $G = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$, as facas são $F = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$ e os pratos são $P = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$.

Os alunos podiam expressar os seus raciocínios usando a linguagem natural escrita ou falada e a estratégia da contagem para expressá-los. Já o professor pode, na questão, ao invés de pedir que as três sequências numéricas comecem com a faca e depois o garfo e o prato, ela pode ter a ordem garfo, faca e prato para seguir a ordem do exemplo dado.

Grupo 3

Gustavo: Professor, eu não estou entendendo.

Professor: Se você tivesse que dar um número para o garfo, que número seria?

Gustavo: O número 1.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o primeiro.

Professor: Se você tivesse que dar um número para a faca, que número seria?

Gustavo: O número 2.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o segundo.

Professor: Se você tivesse que dar um número para o prato, que número seria?

Gustavo: O número 3.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o terceiro.

Professor: Se você tivesse que dar outro número para o garfo, que número seria?

Gustavo: O número 4.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o quarto.

Professor: Se você tivesse que dar outro número para a faca, que número seria?

Gustavo: O número 5.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o quinto.

Professor: Se você tivesse que dar outro número para o prato, que número seria?

Gustavo: O número 6.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o sexto.

Professor: Se você tivesse que dar outro número para o garfo, que número seria?

Gustavo: O número 7.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o sétimo.

Professor: Se você tivesse que dar outro número para a faca, que número seria?

Gustavo: O número 8.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o oitavo.

Professor: Se você tivesse que dar outro número para o prato, que número seria?

Gustavo: O número 9.

Professor: Por quê?

Gustavo: Porque é o nono

Professor: Pronto! Escreva isso.

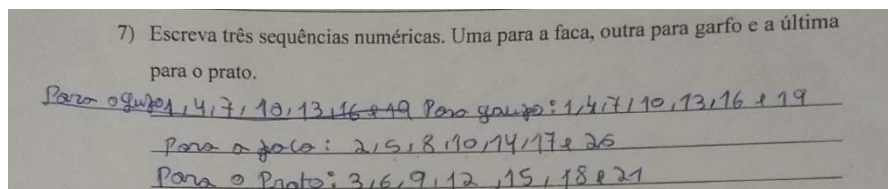


Figura 140. Questão 7 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação simbólica e a linguagem natural escrita

Ao afirmar que não estava entendendo a questão, os alunos usam linguagem natural oral para expressar a dificuldade de interpretação. Ao afirmar que os números para os garfos são 1, 4, 7, as facas são 2, 5, 8 e os pratos são 3, 6 e 9, os alunos usam a linguagem natural para expressar os seus raciocínios. Já ao escrever que para garfos 1, 4, 7, 10, e 13, para facas: 2, 5, 8, 11, 14, 17 e 20 e para os pratos são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, os alunos usam a linguagem natural escrita e a linguagem simbólica para externalizar os seus pensamentos e demonstrarem a estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 8

A questão 8 solicitava que os alunos respondam qual foi a estratégia usada por eles para resolver a questão 7.

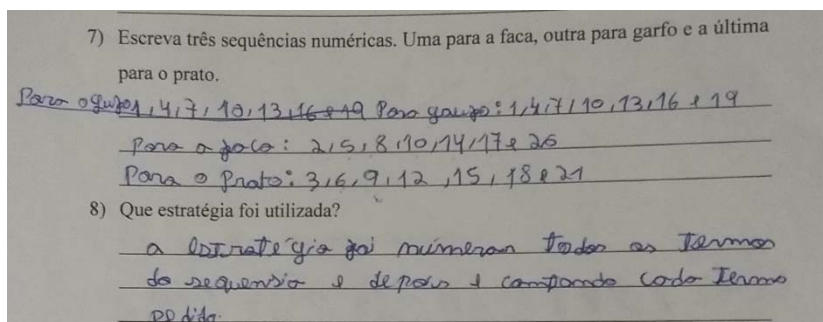


Figura 141. Questões 7 e 8 da tarefa 7 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e linguagem natural escrita

Esse grupo usou a linguagem natural escrita ao afirmar que a estratégia usada foi numerar todos os termos da sequência, para se referir que os ordenou, e depois contou para expressar que foi usada a estratégia da contagem.

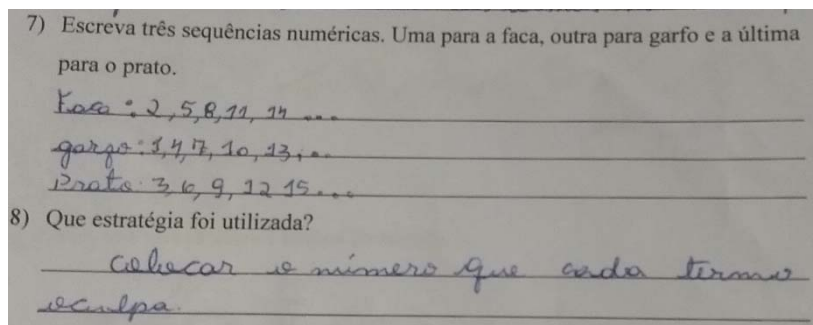


Figura 142. Questões 7 e 8 da tarefa 7 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e linguagem natural escrita

Esse grupo usou a linguagem natural escrita ao afirmar que a estratégia usada foi colocar os números que cada termo ocupa, para se referir que usou a estratégia relacional.

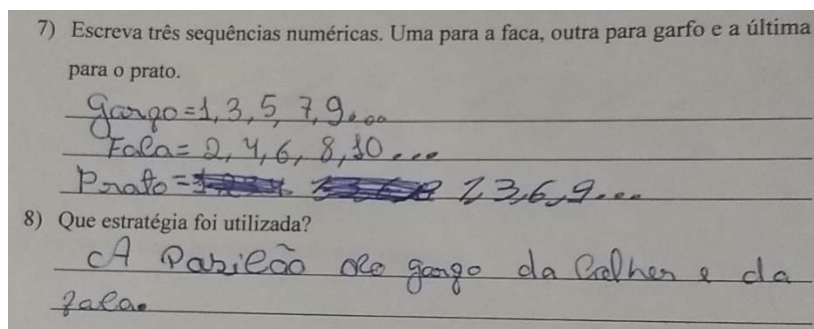


Figura 143. Questões 7 e 8 da tarefa 7 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e linguagem natural escrita

Esse grupo usou a linguagem natural escrita ao afirmar que a estratégia usada foi a posição do garfo, para se referir a estratégia de identificação de uma regularidade.

Questão 9

A questão 9 solicitava que os alunos estabeleçam uma regra a construção da sequência dada como exemplo.

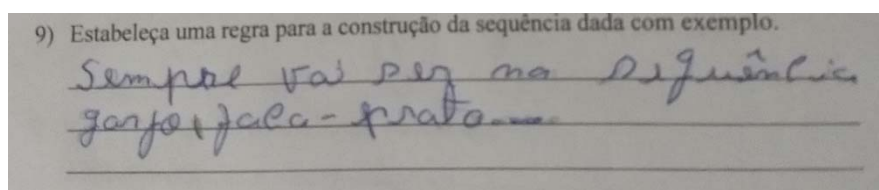


Figura 144. Questão 9 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando comorepresentação a linguagem natural escrita

Esse grupo usou a linguagem natural escrita ao afirmar que a regra usada foi que seria garfo, faca e prato, para mostrar que usou a estratégia do reconhecimento de padrão.

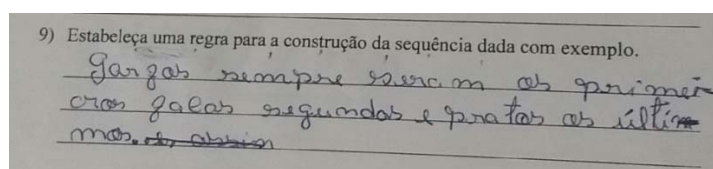


Figura 145. Questão 9 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando comorepresentação a linguagem natural escrita

Esse grupo usou a linguagem natural escrita ao afirmar que a regra usada foi que os garfos sempre seriam os primeiros, as facas sempre seriam os segundos e que os pratos sempre seriam os últimos, para mostrar que usou a estratégia identificação de uma regularidade.

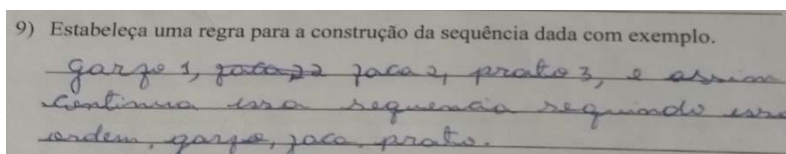


Figura 146. Questão 9 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando comorepresentação a linguagem natural escrita

Esse grupo usou a linguagem natural escrita e representação simbólica, ao afirmar que a regra usada foi que os garfos 1, faca 2 e prato 3 continuando assim a sequência para demonstrar que usou a estratégia de identificação de uma regularidade.

Balanço

Representações utilizadas pelos alunos para compreender os padrões e regularidades. Nesta aula, os alunos usaram quatro tipos de representações para compreender os padrões e as regularidades nas seqüências: (1) Linguagem oral; (2) Linguagem natural escrita; (3) Linguagem simbólica; (4) Representação icônica. A linguagem oral aparece nas questões 3, 4, 5, 6 e 7 quando os alunos verbalizaram os seus raciocínios. A linguagem natural escrita apareceu nas questões 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9 quando os alunos escreveram os seus raciocínios na linguagem materna. A representação simbólica apareceu na questão 6, 7, 8 e 9 quando os alunos escreveram os números usando símbolos matemáticos. A representação icônica aparece nas questões 1, 3, 4 e 5 quando os alunos usaram desenhos para expressar os seus raciocínios.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar seqüências. Nesta aula, os alunos usaram 3 tipos de estratégias. (1) Identificação de uma regularidade. (2) Contagem. (3). Relacional. A identificação de uma regularidade surge nas questões 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 9. A estratégia da contagem apareceu nas questões 3, 4, 5, 6 e 8. A estratégia relacional surgiu na questão 7.

Dificuldades que os alunos expressam para compreender padrões e regularidade em seqüências. Nesta aula, os alunos demonstraram sentir 5 tipos de

dificuldades. (1) dificuldade de interpretação. (2) falta de atenção ao enunciado. (3) falta de comunicação. (4) a pouca cultura do trabalho em pares. (5) Dificuldade de exaustão A dificuldade de interpretação surge nas questões 5 e 7. A falta de atenção ao enunciado surge na questão, a pouca cultura do trabalho em pares e a exaustão surgem na questão 5.

Tarefa 8 – Sequência para avaliar

No dia 30 de maio de 2019, ao término da sétima aula, desenvolvi a oitava tarefa proposta aos alunos foi a última desta experiência de ensino e foi desenvolvida individualmente. O objetivo dessa tarefa era avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante a experiência de ensino e quais foram os seus alcances e limitações. Para tanto, pedi que eles destacassem uma falha do caderno e solicitei que eles fizessem a sua própria sequência. Dei sugestões para que eles criassem as suas próprias questões e para pedirem aos seus colegas as resolvam.

Representações matemáticas usadas pelos alunos

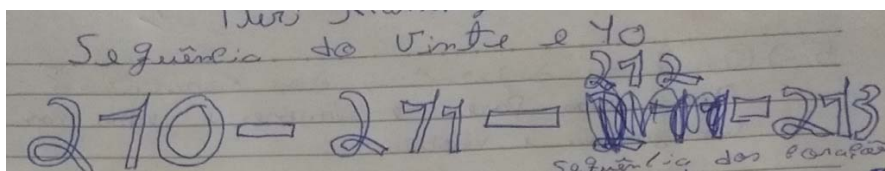


Figura 147. Sequência crescente criada pelos alunos representada em linguagem natural e simbólica

Esse aluno criou uma sequência crescente formada pelos números 210, 211, 212 e 213. Ele a nomeou de sequência do 20 e do 10, pois o algarismo que ocupava a ordem das centenas representa 20 dezenas e o algarismo que representa a ordem das dezenas representa 10 unidades. É uma progressão aritmética cuja a razão é +1. Para representá-la, ele usou linguagem simbólica.

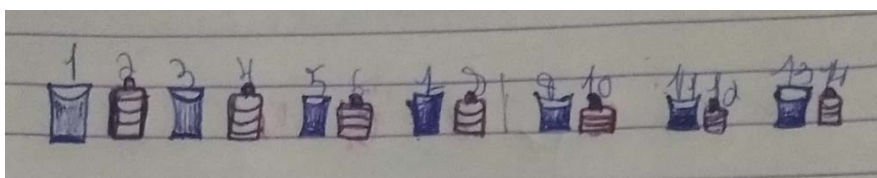


Figura 148. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada pela linguagem simbólica e pictórica

Essa aluna criou uma sequência repetitiva. Para formá-la, ela usou a representação icônica com desenhos de velas e copos.

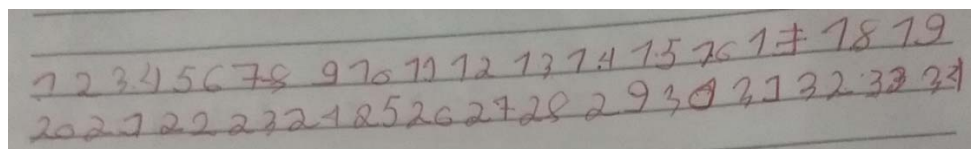


Figura 149. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica.

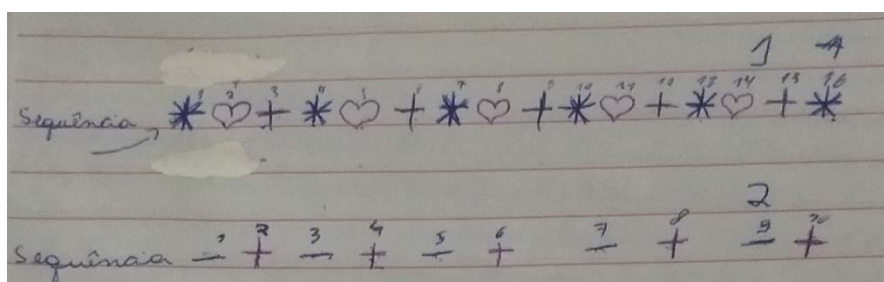


Figura 150. Sequências repetitivas criada pela aluna representada em linguagem icônica

Essa aluna criou duas sequências repetitivas, ela usou a representação icônica para formá-la. Na primeira, ela usa desenhos de asterístico, um coração e uma cruz. Na segunda, ela usa os sinais de mais e de menos.

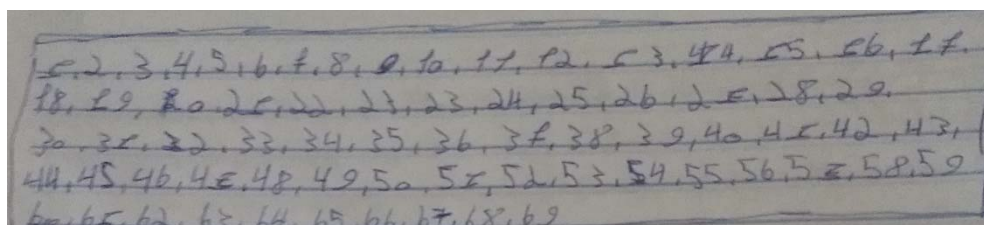


Figura 151. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica.

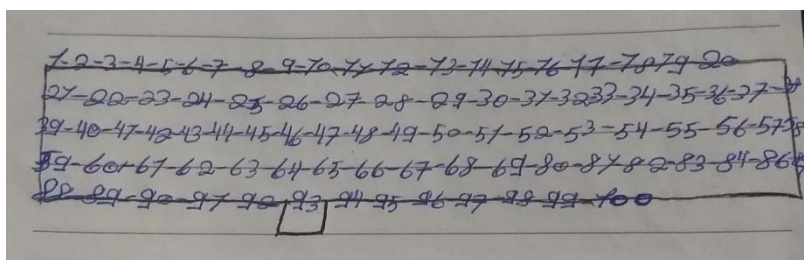


Figura 152. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112

Figura 153. Sequência com quadro de números, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Essa aluna criou uma sequência com quadro de números, Para representá-la, ela usou a linguagem simbólica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114

Figura 154. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica

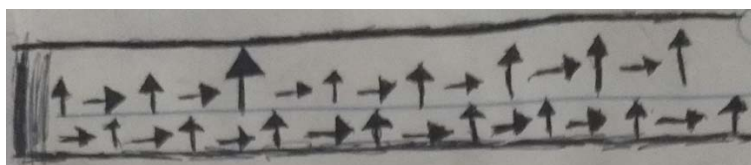


Figura 155. Sequência repetitiva criada pelo aluno representada em linguagem icônica

Esse aluno criou uma sequência repetitiva. Ele usou a representação icônica para representá-la.

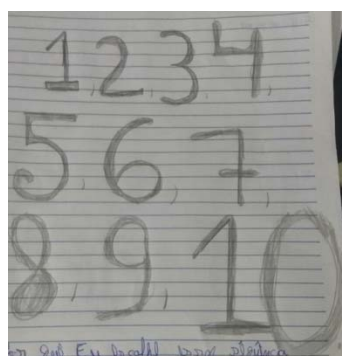


Figura 156. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica

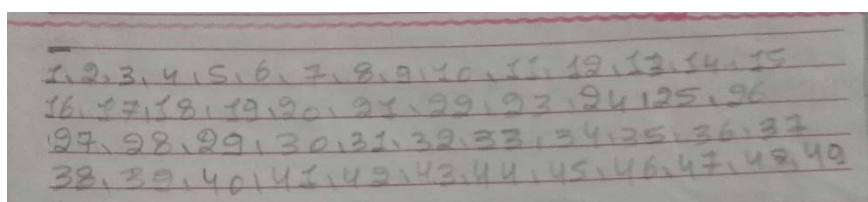


Figura 157. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica.

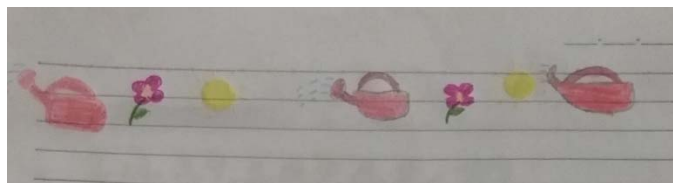


Figura 158. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica

Essa aluna criou uma sequência repetitiva. Para formá-la, ela usa a representação icônica com desenhos de regador, flor e sol.

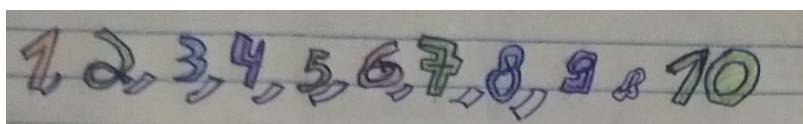


Figura 159. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica

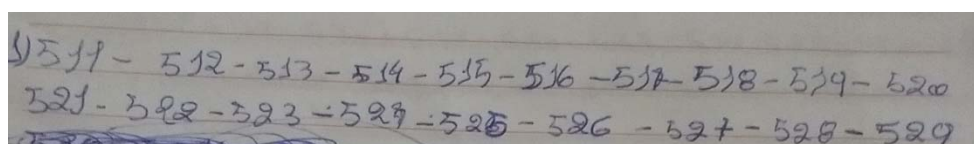


Figura 160. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Esse aluno cria uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usa a linguagem simbólica

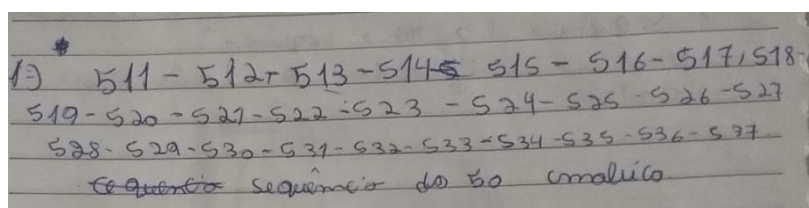


Figura 161. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica e linguagem natural escrita

Esse aluno criou uma sequência numérica crescente. Para representá-la, ele usou a linguagem simbólica.

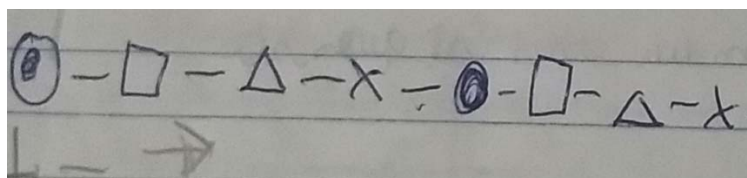


Figura 162. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica

Essa aluna criou uma sequência repetitiva. Para formá-la, ela usou a representação icônica com desenhos de círculo, quadrado, triângulo e a letra x.

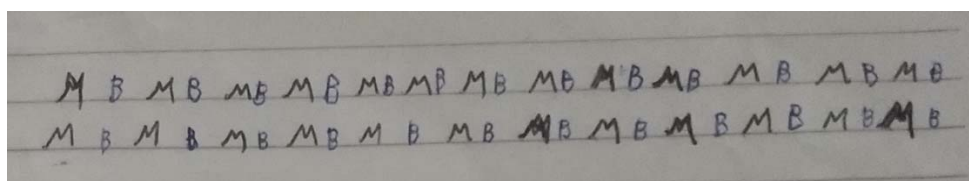


Figura 163. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica

Esse aluno cria uma sequência repetitiva. Para formá-la, ela usa a representação icônica com desenhos da letra M e da letra B.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar sequências

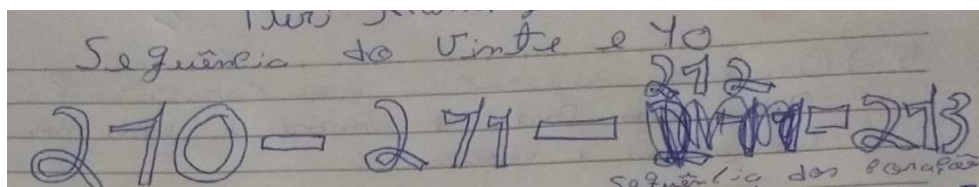


Figura 164. Sequência crescente criada pelos alunos representada em linguagem natural e simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

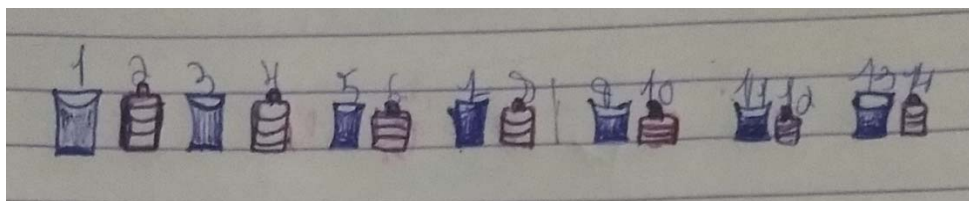


Figura 165. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada pela linguagem simbólica e pictórica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que os elementos cujas posições ocupam ordens ímpares são sempre copos e os elementos cujas posições são pares são sempre velas.

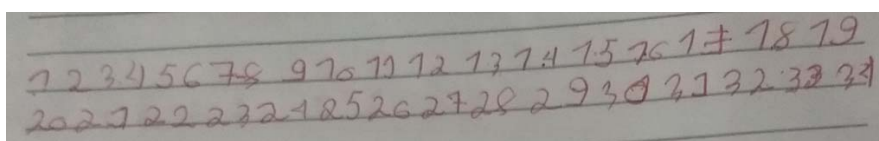


Figura 166. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

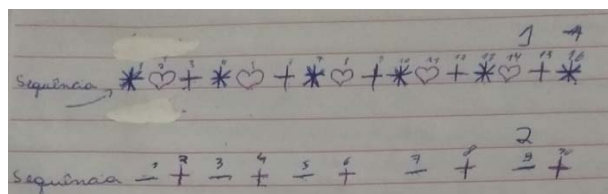


Figura 167. Sequências repetitivas criada pela aluna representada em linguagem icônica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade. Na primeira sequência ao compreender que os elementos cujas posições ocupam ordens 1, 3, 4. 7... são asterístico, os das posições 2, 5, 8. 11... são

corações e das posições 3, 6, 9, 12 são uma cruz. Na sequência 2, esse reconhecimento vem do fato que os elementos que ocupam a posição de ordem ímpares são sempre o sinal de menos e que os elementos que ocupam a posição de ordens pares são sempre o sinal de mais.

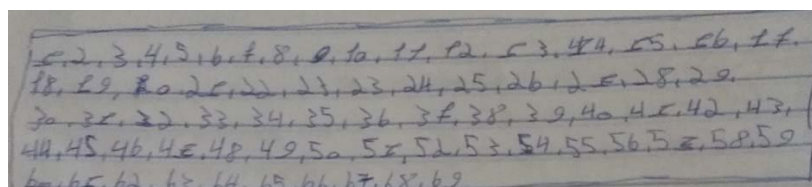


Figura 168. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112

Figura 169. Sequência com quadro de números, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

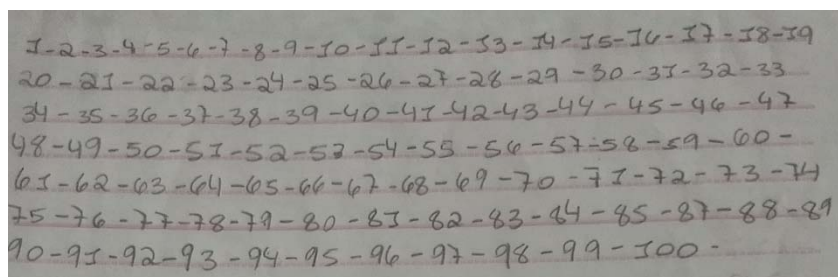


Figura 170. Sequência com quadro de números, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

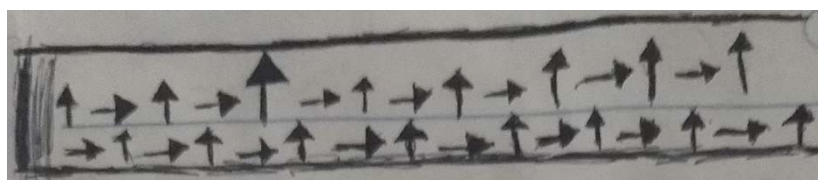


Figura 171. Sequência repetitiva criada pelo aluno representada em linguagem icônica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que os elementos cujas posições ocupam ordens ímpares são sempre uma seta na direção vertical no sentido norte e os elementos cujas posições são pares são sempre uma seta horizontal no sentido leste.

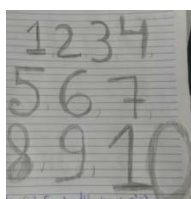


Figura 172. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade da esquerda para direita e três unidades de cima para baixo.

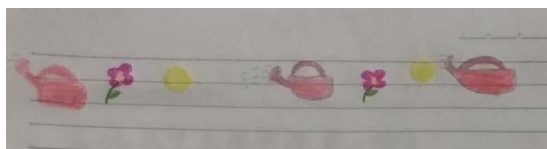


Figura 173. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica

Para representar essa sequência, os alunos usam a estratégia de identificação de uma regularidade ao seguir a ordem regador, flor, sol, regador, flor, sol...

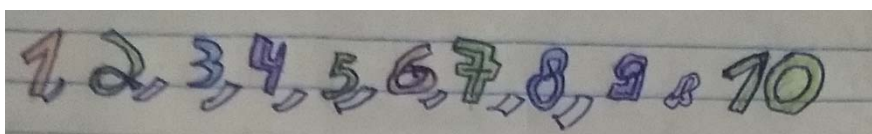


Figura 174. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

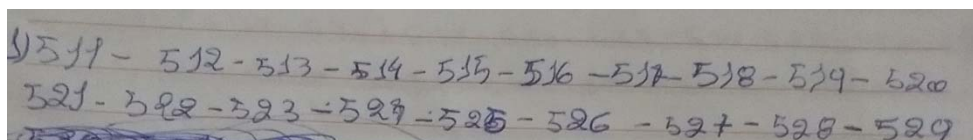


Figura 175. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

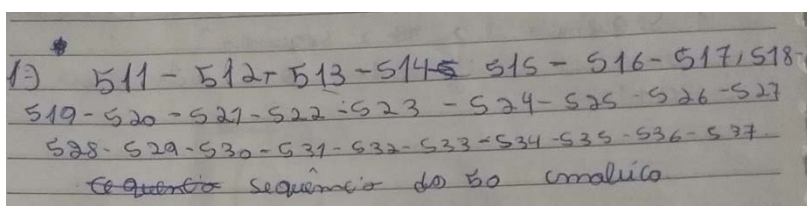


Figura 176. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica e linguagem natural escrita

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que para encontrar o sucessor de cada número aumenta uma unidade.

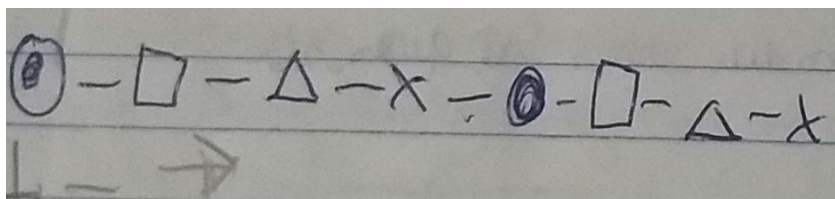


Figura 177. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade, ao compreender que a sequência sempre segue a ordem círculo, quadrado, triângulo e letra.

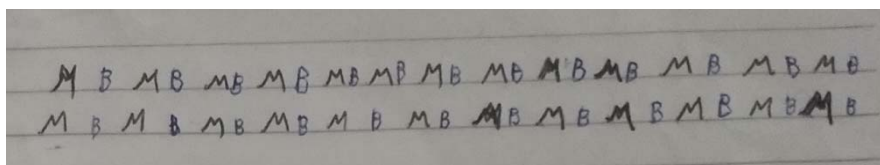


Figura 178. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica

Para representar essa sequência, os alunos usaram a estratégia de identificação de uma regularidade ao compreender que os elementos cujas posições ocupam ordens ímpares são sempre a letra M e os elementos cujas posições pares são sempre a letra B.

Dificuldades que os alunos expressam para compreender padrões e regularidades em sequências

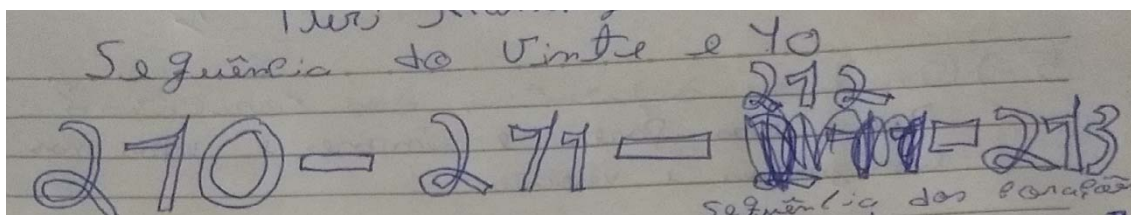


Figura 179. Sequência crescente criada pelos alunos representada em linguagem natural e simbólica

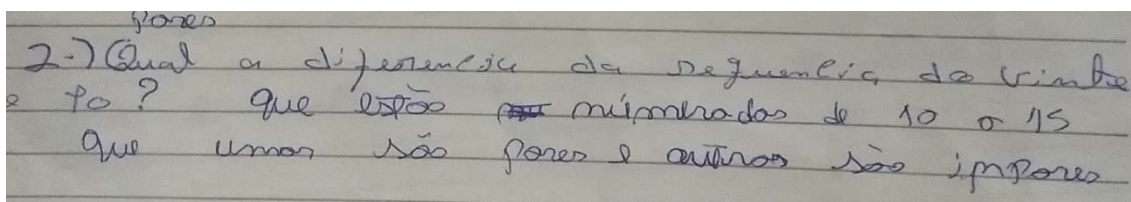


Figura 180. Questão elaborada pelos alunos, na tarefa 8, com a sua respectiva resposta em linguagem natural escrita e linguagem simbólica

Nessa questão, apesar dos alunos conseguirem identificar os números pares e ímpares, eles mostram dificuldades em ordená-los, ou seja, dificuldade em usar os números ordinais

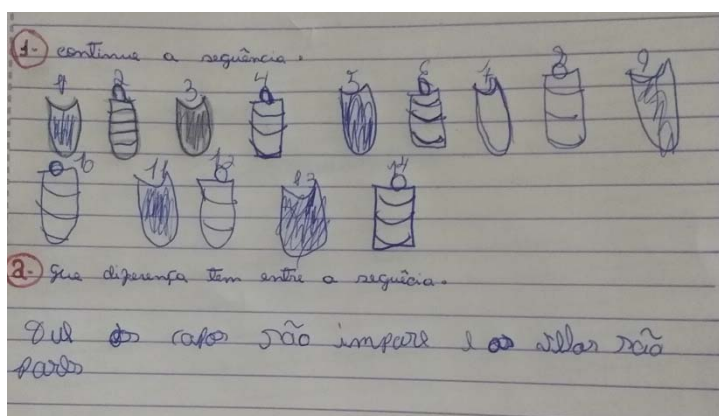


Figura 181. Duas questões elaboradas pelos alunos, na tarefa 8, com as suas respostas em linguagem simbólica, representação icônica e linguagem natural escrita

Nessa questão, apesar dos alunos conseguirem identificar os números pares e ímpares, eles mostram dificuldades em ordená-los, ou seja, dificuldade em usar os números ordinais.

Figura 184. Representação de uma sequência numérica crescente em linguagem simbólica, com a sua respectiva questão e resposta em linguagem simbólica

Nessa questão, os alunos mostram dificuldades de interpretação, pois a questão solicita que eles continuem a sequência, mas eles apenas escrevem alguns termos já escritos nela.

A handwritten numerical grid with 10 columns and 7 rows. The numbers are written in a cursive script. Below the grid, there is a handwritten question in Portuguese: "2) quanto Pular Rita de gauguin feito coromela" and a sequence of numbers: "49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63-64".

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112

2) quanto Pular Rita de gauguin feito coromela
 49-50-51-52-53-54-55-56-57-
 58-59-60-61-62-63-64

Figura 185. Quadro numérico com a sua respectiva questão e resposta em linguagem simbólica

Nessa questão, os alunos mostram dificuldades de interpretação, pois a questão solicita que eles identifiquem uma regularidade, mas eles apenas escrevem uma sequência do quadro.

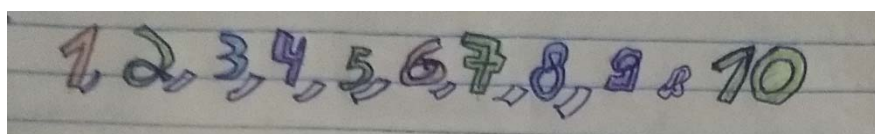


Figura 186. Representação de uma sequência numérica crescente em linguagem simbólica

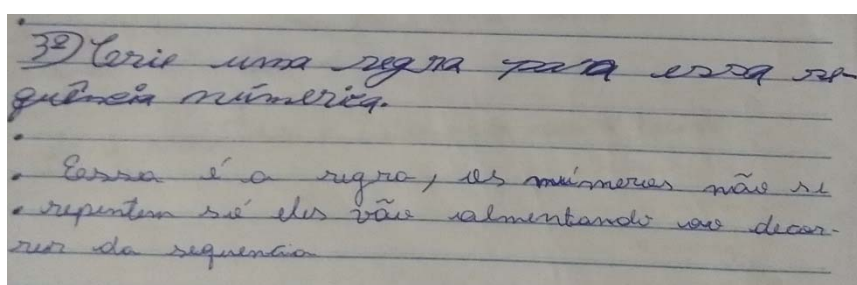


Figura 187. Questão com a sua respectiva resposta em linguagem natural

Apesar dos alunos identificarem que se trata de uma sequência crescente e não repetitiva, eles mostram dificuldade em exibir o padrão da sequência.

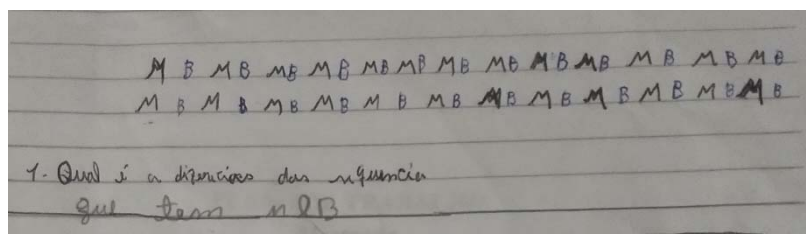


Figura 188. Sequência repetitiva com a sua respectiva questão e resposta

A pesar dos alunos identificarem que é uma sequência repetitiva, eles têm dificuldades em ordenar os seus elementos.

Balanço

Representações utilizadas pelos alunos para compreender os padrões e regularidades. Nesta aula, os alunos usaram dois tipos de representações para compreender os padrões e as regularidades nas seqüências: (1) Linguagem simbólica. (2) Representação icônica.

Estratégias seguidas pelos alunos para representar seqüências. Nesta aula, os alunos usaram apenas uma identificação de uma regularidade como estratégia.

Dificuldades que os alunos expressam para compreender padrões e regularidade em seqüências. Nesta aula, os alunos demonstram sentir 4 tipos de dificuldades. (1) Dificuldade em usar os números ordinais. (2) Dificuldade de exibir o padrão. (3) Dificuldade de argumentação. (4) Dificuldade de interpretação.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Neste capítulo faço um resumo do estudo e discuto os principais resultados, dando especial atenção às representações e estratégias dos alunos e às suas dificuldades no decorrer da experiência, procurando responder às questões que orientam a pesquisa. Na parte final, realizo uma reflexão geral sobre o trabalho e da sua importância para mim enquanto professor e pesquisador.

Síntese do estudo

Neste estudo, busco compreender como o trabalho com padrões e regularidades em sequências lineares, em uma experiência de ensino com alunos do 5.º ano de escolaridade de uma escola da rede pública municipal de uma localidade do Estado da Bahia, Brasil, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Mais especificamente procuro saber:

- i) Que estratégias os alunos utilizam para compreender os padrões e regularidades em sequências lineares?
- ii) Que representações os alunos utilizam para representar sequências lineares?
- iii) Que dificuldades os alunos expressam para compreender padrões e regularidades em sequências lineares?

O capítulo inicial aborda a motivação e pertinência do estudo, o meu contato com o tema da pesquisa, o objetivo e as questões do estudo. O quadro teórico aborda aspectos que dizem respeito ao pensamento algébrico a partir da exploração de sequências e regularidades. Indica que, nos primeiros anos, o desenvolvimento do

pensamento algébrico pode apoiar-se na realização de tarefas que envolvem padrões figurativos, geométricos ou numéricos, pois estas tarefas possibilitam formular generalizações, desenvolver raciocínios matemáticos complexos, fazer conexões matemáticas, enxergar sequências, relacionar diversos conteúdos matemáticos, elaborar conjecturas, realizar uma aprendizagem mais significativa, praticar a comunicação matemática e usar a linguagem natural escrita e oral. Além disso, estas tarefas permitem abordar aspectos referentes às representações em linguagem oral e escrita e icônicas bem como a diversas estratégias e dificuldades.

O estudo segue uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo em que o design assenta uma experiência de ensino. Com esse design não se almeja generalizar os resultados, mas obter subsídios para responder às questões do estudo. A coleta de dados foi feita com uma turma do 5.º ano, no 1.º semestre do ano letivo de 2019, a partir de estudo prévio feito num estudo-piloto numa outra turma do mesmo ano, na mesma escola, comigo exercendo o duplo papel de professor e investigador. Os instrumentos usados para a coleta de dados foram: observação, registros de áudios, vídeos e documentos produzidos pelos alunos. Para analisar os dados foram definidas dimensões a partir das questões do estudo, nomeadamente, *estratégias e representações usadas pelos alunos e dificuldades por eles expressas para compreender padrões e regularidades em sequências lineares*.

Conclusões do estudo

De seguida, busco responder às questões do estudo.

Questão 1. Que estratégias os alunos utilizam para compreender os padrões e regularidades em sequências lineares?

Tratando-se dos alunos do 5.º ano, optei por tarefas contendo sequências pictóricas repetitivas e crescentes e numéricas crescentes. Desta forma, em sequências repetitivas, sequências crescentes, sequências mistas, parcialmente repetitivas e parcialmente crescentes, os alunos usam duas estratégias: (1) Identificação de uma regularidade e (2) Estratégia de representação e contagem.

Como em Teixeira e Guimarães (2011), os alunos usam a estratégia de identificação de uma regularidade nas tarefas 1, 2, 5, 6 e 7, quando tomam um termo da sequência em que a regularidade fica aparente e exibem os próximos termos.

Na tarefa 1 (sequência repetitiva), essa estratégia fica evidente quando a aluna Larissa Manuela conclui o seu pensamento, ao verbalizar e escrever que o objeto que está no número 324 é uma borracha, porque é um número par e ao verbalizar e escrever que o objeto que está no número 543 é um lápis, porque o lápis é sempre ímpar.

Na tarefa 2 (também uma sequência repetitiva), na questão 1, a estratégia de identificação de uma regularidade fica evidente quando os alunos Lucas e Gustavo respondem de forma oral, usando a linguagem natural, que a sequência continua com as setas para cima se referindo à seta vertical e com a seta deitada se referindo a seta horizontal. Já na questão 3, transparece quando a aluna Ana Clara diz oralmente que observou que a seta horizontal é sempre ímpar e a vertical é sempre par.

Na tarefa 5 (sequência numérica crescente), na questão 2, a estratégia de identificação de uma regularidade transparece quando o aluno Ronaldinho Gaúcho usa a linguagem oral para afirmar que era a sequência do 3. Na questão 3, fica evidente quando as alunas Mariana e Isabella associaram a linguagem natural à linguagem simbólica, para indicar que os termos da sequência são números que pulam de dois em dois. Na questão 4, a estratégia é seguida quando os alunos escrevem que a regra que usaram foi perceber que os números aumentam de três em três.

Na tarefa 6 (mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescente), a estratégia de identificação de uma regularidade surge na questão 3 quando os alunos usam a linguagem natural escrita dizendo que pensaram e desenharam um círculo e um quadrado e afirmaram que assim vai. Na questão 4, surge quando os alunos usam a linguagem natural escrita para afirmarem que o 30.º termo será um quadrado, porque é um número par.

Na tarefa 7 (sequência pictórica crescente), a estratégia de identificação de uma regularidade aparece na questão 1, quando os alunos usam representação icônica para se expressarem através de desenhos e a linguagem natural escrita para indicarem que a sequência é formada por garfo, faca, prato, garfo, faca e prato. Na questão 2, esta estratégia aparece quando os alunos usam a linguagem natural escrita ou desenhos para formar as sequências. Na questão 3, aparece quando os alunos afirmam perceber que o garfo, a faca e o prato sempre se repetem nessa ordem. Na questão 4, aparece quando Gabryela usa a linguagem oral para afirmar que fez desenhos, para se referir à

representação icônica, continuando a sequência do 13.º termo e demonstrando assim que usou esta estratégia. Na questão 5, a estratégia de identificação de uma regularidade aparece quando os alunos Ronaldinho Gaúcho e Messi fazem desenhos para representar os elementos garfo, faca e prato, repetidas vezes. Na questão 7, aparece quando os alunos escrevem que para garfos 1, 4, 7, 10, e 13, para faca 2, 5, 8, 11, 14, 17 e 20 e para os pratos 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Na questão 9, surge quando os alunos usam a linguagem natural escrita para afirmarem que a regra usada foi que os garfos sempre seriam os primeiros, as facas sempre seriam os segundos e os pratos sempre seriam os últimos.

Como em Barbosa (2009) e Branco Ponte e Matos (2009), os alunos usam a estratégia de representação e contagem quando exploram as sequências. Esse tipo de representação surge nas tarefas 4, 6 e 7.

Na tarefa 4, a estratégia de representação e contagem surge nas questões 1, 3 e 5. Na questão 1, a estratégia surge quando os alunos, referindo-se aos números ímpares, escreveram que na sequência, o número 1 o número 2, o número 3 o número 4 e o número 5, o grupo usou a linguagem natural, associada a representação icônica para continuar a sequência representando as respectivas, somas das quantidades de boas desenhadas expressas pelos números 11, 13, 15, 17, 19... Na questão 3, surge quando o aluno El Gato aponta com o dedo polegar direito, faz uma relação do número de bolas com os números cardinais de 1 a 25, soma a quantidade de bolas dos 1.º, 2.º, 3.º, 4.º, 5.º e 6.º termos que são, respectivamente, 1, 3, 5, 7 e 9, cuja soma resulta em 25. Dessa forma, ele deduziu que essas bolas fazem parte de um único conjunto que cuja cardinalidade é 25. Na questão 5, surge quando os alunos dos outros grupos, para responder à questão, desenvolvem um raciocínio similar à do grupo de El Gato, isto é, somam as quantidades de bolas.

Na tarefa 6, os alunos usam a estratégia de representação e contagem na questão 4, quando afirmam que o 30.º elemento será um quadrado, porque, ao contar, ele foi encontrado.

Na tarefa 7, a estratégia de representação e contagem aparece nas questões 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Na questão 3, esta estratégia surge quando o aluno usa a linguagem natural oral, ao afirmar que para encontrar o 45.º termo da sequência, “fez contando”. Na questão 4, surge quando Gabryela afirma que foi contando para concluir que o elemento 78 pode ser um garfo. Na questão 5, surge quando o aluno responde que para descobrir qual é o termo 132, contaria de novo, usando a linguagem natural para referir que

repetiria novamente a estratégia da contagem, que já tinha utilizado na questão anterior. Na questão 6, a estratégia de representação e contagem surge quando os alunos afirmam que contaram até 120 e de 120 contaram até 132. Na questão 8, surge quando o grupo usou a linguagem natural escrita para numerar todos os termos da sequência, ou seja, que ordenou e depois contou.

Questão 2. Que representações os alunos utilizam para representar seqüências lineares?

Para representar as seqüências os alunos usam seis tipos de representação: (1) linguagem natural escrita; (2) linguagem natural oral (3) representação ativa; (4) linguagem simbólica; e (5) representação icônica. Como em Moraes (2012) e Mestre (2014), os alunos usam a linguagem natural escrita para representar os seus pensamentos.

A linguagem natural escrita aparece nas tarefas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Na tarefa 1, esta linguagem surge nas questões 2, 4, e 5. Na questão 2, os alunos usam esta linguagem ao redigir que a unidade que se repete é um lápis e uma borracha. Na questão 4, os alunos usam esta linguagem ao redigir que 2 é a unidade do número 132, porque ele está na posição da unidade. Na questão 5, usam esta linguagem ao redigir que os objetos lápis e borracha estão no número 324.

Na tarefa 2, a linguagem natural escrita surge nas questões 2, 3, 4, 6 e 8. Na questão 2, esta linguagem surge quando os alunos escrevem “seta vertical e seta horizontal” e também “seta que repete para frente” e “seta que se repete para o lado”. Na questão 3, surge quando os alunos escrevem que a seta vertical é sempre ímpar e que seta horizontal é sempre par. Na questão 4, surge quando Késsia responde que a unidade que está no número 132 é uma seta horizontal.

Na tarefa 3, a linguagem natural escrita surge nas questões 2, 4, 5 e 6. Na questão 2, esta linguagem surge quando os alunos escrevem que o número aumenta de um em um em ordem crescente para referirem que a diferença entre os termos consecutivos é um número positivo. Na questão 4, surge quando os alunos escrevem que de cima para baixo aumenta o que está em ordem crescente. Na questão 5, surge quando usam a linguagem natural escrita para registrar estratégia de identificação de uma regularidade. Na questão 6, surge quando os alunos demonstram compreender que as seqüências são

crescentes ao usarem para diferenciar as sequências quanto às suas direções (verticais, horizontais e inclinadas) e assim referir as colunas, linhas e diagonais.

Na tarefa 4, a linguagem natural escrita aparece questões 1, 5 e 6. Na questão 1, aparece quando os alunos afirmam que na reta pulam três números, seguindo assim a sequência. Na questão 5, aparece quando escrevem que a regra usada pelo grupo foi seguindo a ordem da sequência. Na questão 6, aparece quando escrevem que a sequência é formada apenas por números ímpares.

Na tarefa 5, a linguagem natural escrita surge nas questões 1, 2, 3 e 4. Na questão 1, surge quando os alunos escrevem que na reta pulam três números, seguindo assim a sequência. Na questão 2, aparece quando escrevem que descobriram a sequência do três. Na questão 3, surge quando os alunos afirmam que os termos da sequência são números que pulam de dois em dois. Na questão 4, aparece quando escrevem que a regra usada pelo grupo foi perceber que os números aumentam de três em três.

Na tarefa 6, a linguagem natural escrita aparece nas questões 2, 3, 4, 5 e 6. Na questão 2, a linguagem natural escrita aparece quando os alunos redigem que as bolas são ímpares, para se referir aos círculos, e que os quadrados são pares. Surge também quando afirmam que existe semelhança, que reside no fato que em ambas as sequências existia bola (para referir o círculo) e quadrado. Surge ainda quando escrevem que a semelhança entre a sequência reproduzida pelo grupo e a sequência do exemplo é que cada bola tem um número, para se referir à posição do termo do círculo, e que esse número representa a quantidade de quadrinhos. Na questão 3, a linguagem natural escrita aparece quando os alunos redigem que desenharam um círculo e um quadrado e afirmaram que assim vai, ao escreverem que à medida que os círculos vão aumentando o número de quadrados aumenta e que, pela posição do círculo, é possível determinar o número de quadrados. Surge ainda quando os alunos escrevem que usaram a bola e quadrado para representar a sequência e que sabem que as bolas são ímpares e que os quadrados são pares. Na questão 4, esta linguagem aparece quando os alunos escrevem que o 30.º termo será um quadrado, porque é um número par bem como que o 30.º elemento será um quadrado, porque, ao contar, ele foi encontrado. Na questão 5, esta linguagem aparece quando os alunos escrevem que são 15 quadrados, pois isso é a metade de 30. Na questão 6, aparece quando os alunos escrevem que a quantidade de número que tem no círculo, para se referir à ordem do termo que o círculo ocupa.

Na tarefa 7, a linguagem natural escrita aparece nas questões 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Na questão 1, esta linguagem aparece quando os alunos escrevem garfo, faca, prato,

garfo, faca e prato, para indicar os 6 termos da sequência seguintes. Na questão 2, aparece quando os alunos escrevem que fizeram desenhos. Na questão 3, surge quando os alunos escrevem que termina com prato, porque fez contando. Na questão 4, aparece quando Gabryela escreve que o termo 78 pode ser um gafo. Na questão 5, aparece quando respondem que o elemento 133 é um gafo, o elemento 143 é uma faca, o elemento, 135 é um prato, o elemento 136 é um garfo e o elemento 137 é uma faca. Na questão 6, aparece quando alunos escrevem que a estratégia foi somar 24 ao final. Na questão 8, aparece quando alunos escrevem que a estratégia usada foi numerar todos os termos da sequência e que a estratégia usada foi colocar os números que cada termo ocupa. Na questão 9, aparece quando alunos afirmam que a regra usada foi que seria garfo, faca e prato, quando afirmam que a regra usada foi que os garfos sempre seriam os primeiros, as facas sempre seriam os segundos e que os pratos sempre seriam os últimos e ao escreverem que a regra usada foi que o “garfo 1, faca 2 e prato 3”, continuando assim a sequência.

Como em Valério (2005), Moraes (2012) e Mestre (2014), os alunos usam a linguagem natural oral para representar as suas estratégias. Esta linguagem aparece nas tarefas 3, 4, 5, 6 e 7. Na tarefa 3, aparece na questão 3 quando Ana Maria diz que é a coluna do 10, para referir a última sequência do quadro. Na tarefa 4, esta linguagem aparece nas questões 3 e 4, quando os alunos respondem quais são as quantidades de bolas nas sequências. Na tarefa 5, esta linguagem surge quando os alunos verbalizam os seus pensamentos. Na tarefa 6, aparece nas questões 1 e 6. Na questão 1, quando Garielly, ao ser questionada o motivo dos riscos na representação, explica de forma verbal e, na questão 6, quando explica que a quantidade de quadrados é a metade do número que ele está.

Na tarefa 7, a linguagem oral aparece nas questões 3, 4, 5, 6 e 7. Na questão 3, a linguagem natural oral aparece quando Ronaldinho afirma que para encontrar o 45.º termo da sequência, fez contando. Na questão 4, aparece quando Gabryela afirma que fez desenhos, para se referir à representação icônica, e que foi contando para se referir à estratégia da contagem. Na questão 5, esta linguagem natural oral aparece quando Ronaldinho Gaúcho afirma que não está entendendo à questão, para mostrar a sua dificuldade de interpretação. Na questão 6, aparece quando os alunos afirmam que contaram até 120, para referirem que usaram a estratégia da contagem.

Como em Moraes (2012), os alunos usam representações ativas. Neste estudo, estas representações aparecem nas tarefas 2, 3, 4 e 5. Na tarefa 2, aparecem na questão 1,

quando Gustavo emprega os dedos das mãos para fazer uma correspondência entre os elementos da sequência e os números naturais. Na tarefa 3, surgem nas questões 1 e 3 quando os alunos Ronaldinho Gaúcho, Neimar Batista e Philipe, fazem movimentos com o corpo para expressar os seus raciocínios. Na tarefa 4, a representação ativa aparece na questão 1, ao apontar com o dedo indicador direito os termos da sequência. Na tarefa 5, a representação ativa surge nas questões 1 e 2 quando os alunos usam gestos para expressar os seus pensamentos.

Como em Moraes (2014) e Mestre (2014) os alunos usam a linguagem simbólica. Esta linguagem aparece nas tarefas 1, 3,4,5, 6,7 e 8. Na tarefa 1, surge na questão 1. Na tarefa 3, surge nas questões 1, 3, 5 e 7. Na questão 1, aparece quando os alunos escrevem os números 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69 e 70, para representar a sequência por eles escolhida. Na questão 3, a linguagem simbólica aparece quando os alunos escrevem os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, para representar a sequência escolhida. Na questão 5, aparece quando os alunos escrevem 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67,78, 89 e 100, para representar a sequência. Na questão 7, surge quando Aline e Alice usam os números 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109 e 110, para representar a sequência. Na tarefa 4, a linguagem simbólica é usada na questão 6 quando os alunos usam a escrita simbólica dos algarismos para relacionar com os termos das seqüências.

Na tarefa 5, a linguagem simbólica é usada nas questões 1 e 2. Na questão 1, esta linguagem aparece quando grupo associa a linguagem natural à linguagem simbólica, ao escrever que os termos da sequência são 1 ímpar, 4 par, 7 ímpar, 10 par e 13 ímpar. Na questão 3, aparece quando os alunos escrevem os números 16, 19, 22 e 25, para representar uma sequência. Na tarefa 6, esta representação aparece na questão quando os alunos escrevem os números usando símbolos matemáticos.

Na tarefa 7, a representação simbólica aparece nas questões 6, 7, 8 e 9. Na questão 6, esta linguagem aparece quando os alunos escrevem os cálculos, em uma folha de rascunho. Na questão 7, aparece quando os alunos escrevem que para garfos 1, 4, 7, 10, e 13, para facas 2, 5, 8, 11, 14, 17 e 20 e para pratos 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Na questão 9, aparece quando os alunos combinam a linguagem natural escrita e representação simbólica, ao afirmar que a regra usada foi que os garfos 1, faca 2 e prato 3 continuando assim a sequência para demonstrar que usou a estratégia de identificação de uma regularidade.

Em Canavarro e Pinto (2012a) e Valério (2005), os alunos usam a representação icônica. Ela aparece nas tarefas 1, 2,6,7 e 8. Na tarefa 1, os alunos usam representações

icônicas para representar as sequências. Na tarefa 2 aparecem quando os alunos fazem o desenho das setas para continuar representando as sequências.

Na tarefa 6, a representação icônica aparece nas questões 1 e 3. Na questão 1, esta representação aparece quando os alunos exibem a sequência com desenhos de quadrados e círculos. Na questão 3, esta representação aparece quando os alunos usam a linguagem natural associada à representação icônica. Na tarefa 7, esta representação aparece nas questões 1, 3, 4 e 5. Na questão 1, aparece quando os alunos se expressam através de desenhos. Na questão 3, a representação icônica aparece quando os alunos fizeram desenhos de garfo, faca e para contar e determinar o 45.º da sequência. Na questão 4, aparece quando Garyela faz desenhos, para contar os termos da sequência. Na questão 5, aparece quando Ronaldinho Gaúcho faz desenhos para representar termos da sequência.

Questão 3. Que dificuldades os alunos expressam para compreender padrões e regularidade sem seqüências lineares?

Os alunos expressam as seguintes dificuldades para compreender padrões e regularidades: (1) Entender o termo unidade; (2) Determinar os números pares e ímpares; (3) Interpretar; (4) Ordenar; (5) Comunicar; (6) Dar atenção ao enunciado; (7) Reduzida cultura do trabalho em pares; (8) Usar números ordinais; (9) Exibir padrão; (10) Argumentar.

A dificuldade de entender o termo unidade surge na tarefa 1, na questão 2, quando os alunos confundem o termo unidade com a classificação de um algarismo que compõe um número de acordo com sua classe e ordem.

A dificuldade de determinar os números pares e ímpares surge nas tarefas 1 e 4. Na Tarefa 1, na questão 4, embora tenham entendido que o lápis é sempre um número ímpar e que a borracha é sempre um número par, as alunas demonstram dificuldades em determinar o objeto que está na posição 324 por não saberem classificar um número como par ou ímpar de acordo com os algarismos das unidades que o compõe. Na tarefa 4, na quarta questão, mostram dificuldade em perceber a quantidade de bolas que terá o 2.º termo da primeira sequência e o 30.º termo da segunda, dada a falta de conhecimento dos alunos dos números ímpares e pares.

A dificuldade de interpretação surge nas tarefas 2, 3, 4, 5, 7 e 8. Na tarefa 2, esta dificuldade surge na questão 1 quando os alunos precisavam de soletrar para ler as

palavras. Na tarefa 3, a dificuldade de interpretação aparece nas questões 1, 2 e 3. Na questão 1, essa dificuldade é fruto de que os alunos ainda não se mostram letrados, ou seja, conseguem formar as palavras, mas não conseguem decodificar o texto. Na questão 2 transparece a dificuldade de não identificar que os termos da esquerda para direita são termos sucessivos. Essa dificuldade surge na questão 3, pois o aluno não sabe identificar uma coluna. Na tarefa 4, na quarta questão, a dificuldade de interpretação surge em virtude do não reconhecimento dos alunos em relacionar a posição dos termos com os números cardinais. Na tarefa 5, nessa aula, identifiquei dificuldade na leitura e na interpretação na questão 2 em virtude do não conhecimento da palavra termo. Na tarefa 7, nas questões 5 e 7 ao afirmarem que não está entendendo a questão, o aluno usa a linguagem natural oral para mostrar a sua dificuldade de interpretação.

A dificuldade em ordenar surge nas tarefas 2 e 8. Na tarefa 2, na questão 3, estas dificuldades transpareceram quando os alunos demonstraram não entender que ordenar os termos é fazer uma correspondência com os números ordinais.

A dificuldade de comunicação surge nas tarefas 3 e 7. Na tarefa 3, esta dificuldade aparece na questão 1, pois os alunos demonstram reduzido hábito de trabalhar em pares, uma vez que enquanto um segura a tarefa como se estivesse trabalhando individualmente, o outro parece que não havia nem tomado conhecimento do seu conteúdo. Além disso, os alunos sempre dão preferência em chamar o professor a debaterem entre si. Na tarefa 7, na questão 5, esta dificuldade é manifesta quando Alycy afirmava que era necessário determinar os elementos que sucediam o 32, Cristiano Ronaldo afirmava que tinha que descobri-lo primeiro, para depois determinar os elementos que os sucediam e assim concordavam, com expressões distintas, a necessidade de descobrir que termo era esse, apesar de não entrarem em comum acordo recorrendo assim ao professor.

A dificuldade em falta de atenção ao enunciado surge na tarefa 7, questão 5, pois ambos leram repetidamente 32 e não 132.

A dificuldade pela reduzida cultura do trabalho em pares surge na tarefa 7, na questão 5 pois os alunos estão sempre consultando ao professor.

A dificuldade em usar números ordinais surge na tarefa 8.

Dificuldade em exibir padrão, é visível na tarefa 5. A dificuldade surge na questão 1 da tarefa 5, apesar de os alunos escreverem que número par: 4 e 10. Número ímpar: 1, 7, 13, usaram a linguagem natural associada à linguagem simbólica para exibir

a estratégia de identificação de uma regularidade, indicando que na sequência existem números pares e ímpares, demonstram dificuldade em exibir o padrão.

Reflexão final

A realização deste trabalho teve uma dupla importância para mim, enquanto investigador e como professor. Enquanto investigador, o meu primeiro e maior desafio foi a ida para Portugal. Precisei me afastar do convívio de minha mãe, família e amigos. Precisei renunciar aos meus empregos como professor da Rede Municipal de Salvador e da Rede do Estado da Bahia. Tive de renunciar alguns confortos e de me desfazer de alguns bens materiais. Porém, os ganhos profissionais e culturais foram tão grandes que faria o mesmo novamente, caso se tornasse necessário.

O segundo desafio foi traçar o objetivo, definir as questões de estudo e fazer a revisão de literatura. Apesar de já estar convicto de que desejo investigar sobre o pensamento algébrico, tinha muitas dúvidas. Por onde devo começar? O que devo ler? Como fazer o resumo de todo esse material bibliográfico? Qual será o objetivo? Quem serão os participantes? Porém, ao fazer os resumos, percebia que esses questionamentos iriam sendo respondidos de forma natural.

Feita a revisão, traçado o objetivo e definidas as questões de investigação, continuei para a fase do planeamento da experiência de ensino. Em que escola realizar o trabalho? Que tarefas aplicar? De início, havia pensado em executar a pesquisa em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Salvador, porém, apesar de ter conseguido a autorização da Secretaria do Município, a escola só tinha uma turma do 4.º ano e, além disso, poucos pais e/ou responsáveis autorizaram a participação dos alunos. Então, precisei mudar o local da pesquisa e o ano de escolaridade que passou do 4.º para o 5.º ano. A escolha das tarefas foi feita com base em Branco, Matos e Ponte (2009).

O momento da recolha de dados também teve os seus desafios. Como irei recolher os dados em uma localidade que não conheço? A superação veio com o estudo-piloto. Durante essa fase, pude conviver com os participantes da pesquisa e, portanto, conhecer um pouco dos seus hábitos e rotinas.

A segunda reflexão que faço é em relação ao meu papel enquanto professor. Apesar de ter 16 anos de experiência como docente na educação básica, nunca havia lecionado nos anos iniciais. Por isso, fiquei um pouco apreensivo em relação ao modo

como iria conduzir a experiência. Daí, resolvi observar como os outros professores em serviço lidavam com os seus alunos e agi de forma similar. Também, a experiência que acumulei durante os quatro anos em que participei em grupo em que desenvolvia aulas exploratórias, os artigos lidos nas disciplinas cursadas durante o curso do mestrado e a revisão de literatura me foram muito úteis nas aulas que lecionei.

Acredito que alguns aspetos poderiam ser mais explorados, nesse trabalho, como a discussão coletiva, por exemplo. Também poderiam ter sido realizadas entrevistas com os alunos e com os professores para saber a importância do trabalho para eles, o que poderá ser feito em pesquisas futuras. Suponho que esse trabalho pode contribuir para os professores que ensinam Matemática nos primeiros anos tanto no que se refere ao fazer como quanto no que se refere ao que fazer. Em termos da Didática da Matemática, acredito que a sua contribuição é referente à confirmação das estratégias, representações e dificuldades expressas por outros alunos de outros lugares.

REFERÊNCIAS

- Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: DES – ME
- Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 15(1), 27-55.
- Borralho, A. C. C (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Minho, Portugal.
- Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editor.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2008b). Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). New York, NY: Lawrence Erlbaum.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005a). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Borralho, A., & Barbosa, E. (2009). Exploração de padrões e pensamento algébrico. In I. Vale et al. (Org.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/ Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- Borralho, A., & Barbosa, E. (2011). Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil, 2011.
- Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Vale, I., Fonseca, L., et al. (2011). Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico. In I. Vale & T. Pimentel (Eds.) *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: Texto Editores.
- Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Ed.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

- Branco, N., & Correia, F. (2015). A análise de seqüências pictóricas por alunos do 4.º ano de escolaridade na promoção do pensamento algébrico. *UIIPS*, 3(6), 169-188.
- Branco, N., & Ponte, J. P. (2012). The study of pictorial sequences as a support to the development of algebraic thinking. *Far East Journal of Mathematical Education*, 8(2), 101-135.
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.
- Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 3(1), pp. 9-13.
- Cohen, L., & Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). London: Routledge.
- Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012b). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade.
- Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012a). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, 21(2), 52-77.
- Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Cerca, M. R. (2014). *O desenvolvimento do raciocínio relacional através das relações de igualdade e desigualdade: Uma experiência de ensino no 3.º ano*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Duval, R. (2012). Registos de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2), 266-297.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). New York, NY: Routledge
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying elementary mathematics in a teachercentered, systemic way. (Retirado em 30 outubro de 2018 de <http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/AlgebrafyingMath.pdf>)
- Kılıç, Ç. (2017). Analyzing middle school students' figural pattern generating strategies considering a quadratic number pattern. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(1), 250-267.
- Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, pp. 342-348.

- Martínez, E. C. (2005). Configuraciones puntuales: Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales. In Henrique M. Guimarães & Lurdes Serrazina (Eds.), *V CIBEM Conferências*(pp. 251-264). Porto: APM.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781-801.
- ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Morais, A. M. L. (2012). *A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2005). *Manual de investigação em ciências sociais*(4ª ed.). Lisboa: Gradiva.
- Radford, L. (2010). The eye as theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30, 2-7.
- Ribeiro, A. J. (2001). *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo.
- Ribeiro, A. J. (2007). *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. Tese de Doutorado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo.
- Ribeiro, A. J. (2010). Uma proposta de construção de perfil conceitual de equação: implicações para a Educação Matemática. *Boletim GEPEM*, 56, 31-44.
- Ribeiro, A. J. (2012). Equação e conhecimento matemático para o ensino: relação e potencialidades para a Educação Matemática. *BOLEMA*, 26, 535-558.
- Ribeiro, A. J. (2013). Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. *Ciência & Educação*, 19(1), 55-71.
- Robertson, M. L., & Taplin, M. F. (1995). *Spatial patterning: A pilot study of pattern formation and generalisation. Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3) Recife, Brazil.
- Teixeira, P., & Guimarães, H. M. (2011). Sequências e regularidades no 7.º ano: uma abordagem no quadro do novo programa de Matemática. *EIEM 2011 - Ensino e*

- aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 441–463). Póvoa do Varzim: M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds).
- Santa, F. C. M., & Sousa, R. F. (2016, julho). A elaboração e implementação de uma tarefa exploratória na perspectiva de um professor da educação básica. *Encontro Nacional da Educação Matemática*, São Paulo, SP, Brasil, 12.
- Silva, O. H.M., & Laburú, C. E. (2011). *Investigações em Ensino de Ciências*, 16(1), 7-33.
- Stein, M. K., & Smith, M.S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
- Mestre, C. M. M. V. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Vale, I. (2003). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *REVEMAT* 8(2), 64-81
- Vale, I. (2012). *As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2013). O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. *Da Investigação às Práticas*, 3(2), 98–124.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2011). Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. *Educação Matemática*, 110, 33-38.
- Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 38-65.
- Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 227–232). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Warren, E. (2005). Patterns Supporting the Development of Early Algebraic Thinking. Obtido em novembro de 2018 de <http://www.merga.net.au/documents/RP882005.pdf>

ANEXO 1- CRONOGRAMA

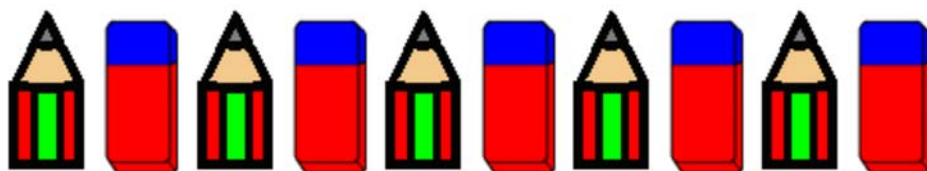
MES/ETAPAS	09/18	10/18	11/18	12/18	01/19	02/19	03/19	04/19	05/19	06/19	07/19
Escolha do tema	x										
Levantamento bibliográfico		X	X								
Elaboração do plano de trabalho			X	x	x						
Coleta dos dados							x				
Análise dos dados							X	x			
Organização do roteiro/partes							X				
Redação do trabalho							X	X	x		
Revisão e redação final									X	x	
Entrega do trabalho										X	x

ANEXO 2- Tarefas

(DIAGNÓSTICO)

TAREFA 1- SEQUÊNCIA REPETITIVA (DIAGNÓSTICO)

Branco, Matos e Ponte(2009, p. 48), a sequência repetitiva da figura seguinte tem apenas um atributo a considerar, o tipo de objecto. Além disso, tem apenas dois objectos diferentes.



1. Continue a sequência.
2. Qual é a unidade que se repete?

3. Descreva uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem (com

base no comprimento da unidade que se repete);

4. Qual é a unidade que está no número 132?

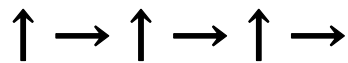
5. Que objeto estará no número 324?

6. Que objeto estará no número 543?

7. Escreva uma regra para determinar os objetos.

TAREFA 2-Sequências repetitivas

Branco, Matos e Ponte (2009, p. 48), as sequências repetitivas são as mais simples e podem ser usadas para o trabalho inicial da procura de regularidades e da generalização. Na sala de aula podem ter diferentes explorações de acordo com o ano de escolaridade.



1)Continue a sequência.

2)Qual é a unidade que se repete?

3)Descreva uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem.

4)Qual é a unidade que está no número 132?

5)Que objeto estará no número 324?

6)Que objeto estará no número 543?

7)Escreva uma regra para determinar os objetos.

TAREFA 3- SEQUÊNCIAS CRESCENTES

Branco, Matos e Ponte (2009, p. 53) A exploração do quadrado 10 por 10 (ver a figura seguinte) deve ser proposta aos alunos do 1.º ciclo com o objectivo de lhes proporcionar a oportunidade de explorarem sequências finitas de números e descreverem as regularidades que encontram, indicando a sua lei de formação:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- 1) Escolha uma linha do quadro. Escreva a sequência dos números que escolheu.

- 2) Quanto aumenta cada número da esquerda para a direita?

- 3) Escolha um coluna do quadro. Escreva a sequência dos números que escolheu.

4) Quanto aumenta cada número de cima para baixo?

5) Escolha uma diagonal do quadro. Escreva a sequência de números. Quanto aumenta de um número para outro?

6) Nas três sequências escolhidas por vocês, vocês perceberam algo que sempre acontece? Em caso afirmativo, escreva o quê.

7) Continuem as três sequências com números que pertencem a elas, mas não estão no quadro.

8) Explique como você pensou para reproduzir as sequências.

TAREFA 4- Sequências crescentes com números pares e ímpares.

Branco, Matos e Ponte (2009, p. 52). Um exemplo do trabalho que pode ser realizado na sala de aula envolve a exploração dos números pares e ímpares e da relação entre eles.

Números ímpares



Números pares



1. Continuem representando as sequências de acordo com o modelo.

2. Descreva os termos da sequência de acordo com a sua ordem.

3. Quantas bolas terão no vigésimo termo da primeira sequência?

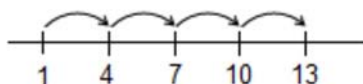
4. Quantas bolas terão no vigésimo termo da segunda sequência?

5. Escreva como você chegou a esses resultados.

6. Crie uma sequência numérica e diga como ela é formada.

TAREFA 5—Sequência utilizando a reta numérica.

Branco, Matos e Ponte 2009, p. 53. É natural que surjam outras sequências de números e a generalização a fazer pode ter por base a sua representação numa reta numérica.



1. Descrevam os termos observados na figura.

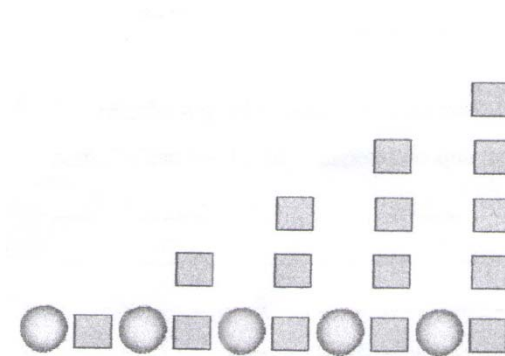
2. Completem a sequência escrevendo outros cinco termos.

3. Qual é o vigésimo segundo termo dessa sequência?

4. Você usou alguma regra para descobri-lo? Em caso afirmativo, qual?

TAREFA 6-Sequência mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescente.

Branco, Matos e Ponte 2009, p. 57. Nas sequências mistas há um atributo que se repete ciclicamente e outro atributo que varia de acordo com a posição que ocupa na sequência.



1. Represente os próximos dois termos da sequência.
2. Existe alguma semelhança ou alguma diferença entre a sequência do exemplo e que você representou? Em caso afirmativo qual?

3. Qual foi a estratégia que você utilizou para representar a sua sequência?

4. O trigésimo termo dessa sequência será círculo ou quadrado? Por quê?

5. Em relação à questão anterior, caso você tenha respondido círculo, quantos serão? Caso você tenha respondido quadrados, quantos serão?

6. Como você pensou para responder a questão 5?

TAREFA 7- Sequências com critérios de divisibilidade



1) Escreva os seis próximos termos da sequência.

2) Que a estratégia foi utilizada para escrevê-los.

3) O 45.º termo da sequência corresponde a que elemento?

4) O termo 78 pode ser um garfo? Por quê?

5) Escreva uma sequência com cinco termos a partir do 132.º termo.

6) Qual foi a estratégia que você utilizou?

7) Escreva três seqüências numéricas. Uma para a faca, outra para garfo e a última para o prato.

8) Que estratégia foi utilizada?

9) Estabeleça uma regra para a construção da seqüência dada como exemplo.

TAREFA 8- Sequência para avaliar

O objetivo dessa tarefa é avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante a experiência de ensino e quais foram os seus alcances e limitações. Para tanto, entreguei uma folha de papel em branco e solicitei que eles fizessem a sua própria sequência. Dei sugestões para que eles criassem as suas próprias questões e pedi para que os seus colegas as resolvessem. Observei quais foram as suas estratégias e dificuldades para representar e generalizar os padrões. Também estive atento para as formas que eles se comunicavam matematicamente e como validavam as ideias dos seus colegas.

ANEXO 3

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Prezado(a) Senhor(a)

Esta pesquisa é sobre *O pensamento algébrico: uma relação com a exploração de seqüências* e está sendo desenvolvida por Rivaldo Firmino Sousa, do Curso do Mestrado em Educação da Universidade de Lisboa, sob a orientação do Prof. João Pedro Mendes da Ponte.

O objetivo do estudo é compreender como o trabalho com padrões e regularidades em seqüências lineares, em uma experiência de ensino com alunos do 5.º ano de escolaridade de uma escola da rede pública municipal pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A finalidade é contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais, visando à melhoria dessa aprendizagem e sem danos para os participantes.

Solicitamos a sua colaboração para a participação do(a) aluno(a) na experiência de ensino, para serem observados, entrevistados, gravados áudios e vídeos e as suas tarefas analisadas e também sua autorização para apresentar os resultados deste estudo em eventos da área de educação e publicar em revista científica nacional e/ou internacional. Por ocasião da publicação dos resultados, o nome do nome do (a) aluno(a) será mantido em sigilo absoluto. Caso decida, poderá retirar o seu educando a qualquer momento, não sofrer qualquer prejuízo. O pesquisador estará a sua disposição para qualquer esclarecimento que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

Assinatura do pesquisador responsável

Declaro que fui informado (a) dos objetivos e da relevância do estudo proposto, de como será a participação do menor que sou responsável, dos procedimentos e ausência de riscos decorrentes deste estudo, e declaro o meu consentimento na participação do(a) aluno(a) que sou responsável na pesquisa. Também concordo que os dados obtidos na investigação sejam utilizados para fins científicos (divulgação em eventos e publicações). Estou ciente que receberei uma via desse documento. Dessa forma autorizo _____ (nome completo) a participar da pesquisa.

Bahia, ____ de _____ de _____

Impressão dactiloscópica



Assinatura do responsável legal

Contato com o Pesquisador (a) Responsável:

Caso pretenda mais informações sobre o presente estudo, favor entrar em contato para o pesquisador.
Rivaldo Firmino Sousa Telefone: (71) 99273-3748. E-mail: rivaldofsousa@gmail.com

ANEXO 4

Índice de figuras

Figura 1. Representação usada pelos alunos para expressar a sequência formada por lápis e borracha	32
Figura 2. Questão 2 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos	33
Figura 3. Questão 2 da tarefa 2 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos	33
Figura 4. Questão 2 da tarefa 2 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos	33
Figura 5. Resposta da questão 2 da tarefa 3 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos	34
Figura 6. Questão 2 da tarefa 4 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos	34
Figura 7. Desenho da reta numérica feito pelos alunos	34
Figura 8. Questão 4 da tarefa 5 com a representação da linguagem natural escrita e simbólica feita pelos alunos	35
Figura 9. Questão 3 da tarefa 6 com a representação da linguagem natural escrita feita pelos alunos	35
Figura 10. Questão 7 da tarefa 7 com a representação simbólica feita pelos alunos	36
Figura 11. Representações icônicas, com objetos como coração, setas, círculos e quadrados	36
Figura 12. Representações icônicas e linguagem natural escrita feita pelos alunos	36
Figura 13. Sequência repetitiva formada por lápis e borracha	42
Figura 14. Representação icônica usada pelos alunos formada por lápis e borracha	43
Figura 15. Questão 2 da tarefa 1 e a respectiva resposta dos alunos usando a representação da linguagem natural escrita	43
Figura 16. Uso da linguagem simbólica para responder a questão 3 da tarefa 1	44
Figura 17. Questão 4 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos usando a representação da linguagem natural escrita	44
Figura 18. Questão 5 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos usando a representação da linguagem natural escrita	45
Figura 19. Questão 1 da tarefa 1 com a respectiva resposta dos alunos usando a representação icônica associada a representação simbólica	45

Figura 20. Sequência de números pares do 2 ao 38	47
Figura 21. Sequência de números ímpares do 1 ao 33	47
Figura 22. Uso da representação da linguagem natural escrita e da representação simbólica para expressar a compreensão do conceito de números pares	48
Figura 23. Questão 5 da tarefa 1 com a sua respectiva resposta em linguagem natural escrita e simbólica	48
Figura 24. Questão 6 da tarefa 1 com a sua respectiva resposta em linguagem natural escrita e simbólica	49
Figura 25. Sequência repetitiva em que a unidade que se repete é uma seta horizontal e outra seta vertical	51
Figura 26. Questão 1 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica	52
Figura 27. Questão 2 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	53
Figura 28. Questão 2 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e icônica	53
Figura 29. Questão 1 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica	54
Figura 30. Questão 3 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	55
Figura 31. Questão 4 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	55
Figura 32. Questão 4 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	56
Figura 33. Questão 4 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	56
Figura 34. Questão 5 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	57
Figura 35. Questão 6 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	57
Figura 36. Questão 7 da tarefa 2 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	58
Figura 37. Quadro numérico	59

Figura 38. Questão 1 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica	61
Figura 39. Questão 3 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica	62
Figura 40. Questão 1 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica	63
Figura 41. Questão 2 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica e natural escrita	63
Figura 42. Questão 3 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica	65
Figura 43. Questão 4 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	66
Figura 44. Quadro numérico com a sua diagonal principal sinalizada com um traço feito com caceta de cor azul	67
Figura 45. Questão 5 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	68
Figura 46. Questão 6 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	68
Figura 47. Resposta da questão 6 com uma representação em linguagem natural escrita	69
Figura 48. Questão 7 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem simbólica	68
Figura 49. Questão 8 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural	70
Figura 50. Questão 8 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural	70
Figura 51. Questão 8 da tarefa 3 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural e simbólica	70
Figura 52. Bolas de futebol agrupadas em conjuntos com 1, 3 5. 7 e 9 unidades, respectivamente. para representar a sequência dos números ímpares	72
Figura 53. Bolas de futebol agrupadas em conjuntos com 2, 4, 6, 8, 10 e 12 unidades, respectivamente. para representar a sequência dos números pares	72
Figura 54. Questão 1 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica	72

Figura 55. Questão 1 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação icônica e simbólica	72
Figura 56. Resposta da questão 1 da tarefa 4 com uma representação icônica e simbólica	74
Figura 57. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	74
Figura 58. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	74
Figura 59. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	74
Figura 60. Questão 2 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	75
Figura 61. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 1 e a quantidade de bolas	75
Figura 62. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 1 e a quantidade de bolas	75
Figura 63. Questão 3 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	76
Figura 64. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 2 e a quantidade de bolas	77
Figura 65. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 2 e a quantidade de bolas	77
Figura 66. Quadro de correspondência entre os termos da sequência 2 e a quantidade de bolas	77
Figura 67. Questão 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	78
Figura 68. Questões 3 e 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	80
Figura 69. Questão 5 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	80
Figura 70. Questão 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	81
Figura 71. Questão 5 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	81

Figura 72. Questões 3 e 4 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	81
Figura 73. Questão 5 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	81
Figura 74. Questão 6 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	82
Figura 75. Questão 6 da tarefa 4 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	82
Figura 76. Reta numérica com os números 1, 4,7, 10 e 13	83
Figura 77. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	84
Figura 78. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e linguagem simbólica	84
Figura 79. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	85
Figura 80. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	85
Figura 81. Questão 1 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	85
Figura 82. Questão 2 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e linguagem simbólica	88
Figura 83. Quadro relacionando o termo com o número	89
Figura 84. Quadro relacionando o termo com o número	89
Figura 85. Quadro relacionando o termo com o número	89
Figura 86. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o sucessor	90
Figura 87. Questão 3 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	91
Figura 88. Questão 4 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	92
Figura 89. Questão 4 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	92
Figura 90. Questão 4 da tarefa 5 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	92

Figura 91.Sequência mista, parcialmente repetitiva e parcialmente crescentecom círculo e quadrado	93
Figura 92.Questão 1 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica	94
Figura 93.Questão 1 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica	95
Figura 94.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	96
Figura 95.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	96
Figura 96.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	96
Figura 97.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	96
Figura 98.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	97
Figura 99.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	97
Figura 100.Questões 1 e 2 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	98
Figura 101.Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	99
Figura 102.Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	99
Figura 103.Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	100
Figura 104.Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	100
Figura 105.Questão 3 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	100
Figura 106.Quadro relacionando os termos com os objetos	101
Figura 107.Quadro relacionando os termos com os objetos	101
Figura 108.Quadro relacionando os termos com os objetos	101

Figura 109. Resposta da questão 4 da tarefa 6 com o uso da representação em linguagem natural escrita	101
Figura 110. Resposta da questão 4 da tarefa 6 com o uso da representação em linguagem natural escrita	102
Figura 111. Resposta da questão 4 da tarefa 6 com o uso da representação em linguagem natural escrita e simbólica	102
Figura 112. Questão 5 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	103
Figura 113. Quadro relacionando o termo com quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome	103
Figura 114. Quadro relacionando o termo com quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome	103
Figura 115. Quadro relacionando o termo com quantidade de objetos e a letra inicial que forma o seu nome	103
Figura 116. Questões 5 e 6 da tarefa 6 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e representação escrita	104
Figura 117. Questão 6 da tarefa 6 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	105
Figura 118. Questões 5 e 6 da tarefa 6 ambas com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica	105
Figura 119. Sequência repetitiva formada por garfo, faca e prato	106
Figura 120. Questão 1 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação pictórica e linguagem natural escrita	107
Figura 121. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	107
Figura 122. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	108
Figura 123. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	108
Figura 124. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	108
Figura 125. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	108

Figura 126. Questão 2 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta com uma representação em linguagem natural escrita	108
Figura 127. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o objeto	109
Figura 128. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o objeto	109
Figura 129. Quadro relacionando a posição do termo, a fórmula, o número e o objeto	110
Figura 130. Questão 3 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação da linguagem natural escrita	111
Figura 131. Representação icônica da sequência	111
Figura 132. Questão 4 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação da linguagem natural escrita	112
Figura 133. Questão 1 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação simbólica e icônica	112
Figura 134. Representação da sequência usando as estratégias simbólicas e icônicas	113
Figura 135. Reprodução da sequência usando a representação icônica	114
Figura 136. Resposta usando a representação em linguagem natural escrita	114
Figura 137. Resposta usando a representação em linguagem natural escrita	116
Figura 138. Questão 6 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação simbólica e a linguagem natural escrita	117
Figura 139. Registro dos cálculos feitos pelos alunos	117
Figura 140. Questão 7 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando a representação simbólica e a linguagem natural escrita	119
Figura 141. Questões 7 e 8 da tarefa 7 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e linguagem natural escrita	120
Figura 142. Questões 7 e 8 da tarefa 7 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e linguagem natural escrita	120
Figura 143. Questões 7 e 8 da tarefa 7 com as suas respectivas respostas com uma representação em linguagem natural escrita e simbólica e linguagem natural escrita	121
Figura 144. Questão 9 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando como representação a linguagem natural escrita	121

Figura 145. Questão 9 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando comorepresentação a linguagem natural escrita	122
Figura 146. Questão 9 da tarefa 7 com a sua respectiva resposta usando comorepresentação a linguagem natural escrita	122
Figura 147. Sequência crescente criada pelos alunos representada em linguagem natural e simbólica	123
Figura 148. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada pela linguagem simbólica e pictórica	124
Figura 149. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	124
Figura 150. Sequências repetitivas criada pela aluna representada em linguagem icônica	124
Figura 151. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	125
Figura 152. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	125
Figura 153. Sequência com quadro de números, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	125
Figura 154. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	126
Figura 155. Sequência repetitiva criada pelo aluno representada em linguagem icônica	126
Figura 156. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	126
Figura 157. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	127
Figura 158. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica	127
Figura 159. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	127
Figura 160. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	127

Figura 161. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica e linguagem natural escrita	128
Figura 162. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica	128
Figura 163. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica	128
Figura 164. Sequência crescente criada pelos alunos representada em linguagem natural e simbólica	129
Figura 165. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada pela linguagem simbólica e pictórica	129
Figura 166. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	129
Figura 167. Sequências repetitivas criada pela aluna representada em linguagem icônica	130
Figura 168. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	130
Figura 169. Sequência com quadro de números, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	131
Figura 170. Sequência com quadro de números, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	131
Figura 171. Sequência repetitiva criada pelo aluno representada em linguagem icônica	131
Figura 172. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	132
Figura 173. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica	132
Figura 174. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	132
Figura 175. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica	133
Figura 176. Sequência numérica crescente, criada pelos alunos, representada em linguagem simbólica e linguagem natural escrita	133
Figura 177. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica	133

Figura 178. Sequência repetitiva criada pelos alunos representada em linguagem icônica	134
Figura 179. Sequência crescente criada pelos alunos representada em linguagem natural e simbólica	134
Figura 180. Questão elaborada pelos alunos, na tarefa 8, com a sua respectiva resposta em linguagem natural escrita e linguagem simbólica	134
Figura 181. Duas questões elaboradas pelos alunos, na tarefa 8, com as suas respostas em linguagem simbólica, representação icônica e linguagem natural escrita	135
Figura 182. Representação de uma sequência numérica crescente em linguagem simbólica, com a sua respectiva questão e resposta em linguagem natural escrita	135
Figura 183. Representação de 2 sequências pictóricas com as suas respectivas questões e respostas	136
Figura 184. Representação de uma sequência numérica crescente em linguagem simbólica, com a sua respectiva questão e resposta em linguagem simbólica	136
Figura 185. Quadro numérico com a sua respectiva questão e resposta em linguagem simbólica	137
Figura 186. Representação de uma sequência numérica crescente em linguagem simbólica	137
Figura 187. Questão com a sua respectiva resposta em linguagem natural	137
Figura 188. Sequência repetitiva com a sua respectiva questão e resposta	138